

بسم الله الرحمن الرحيم



دانشگاه حکیم بسزوری

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته علوم تصمیم و مهندسی دانش

بررسی نُرَم‌های مختلف در نمایش تُنک

استادان راهنما

دکتر مهدی زعفرانیه و دکتر محمود امین طوسی

پژوهشگر:

راضیه حامدی

بهمن ۱۳۹۵



دانشگاه حکیم سبزواری

فرم ۱۰۵

بسمه تعالی

فرم ارزشیابی و صورتجلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد *

جلسه دفاع از پایان نامه آقای/خانم راضیه حامدی دانشجوی رشته علوم تصمیم و مهندسی دانش گرایش به شماره دانشجویی ۹۳۱۳۱۳۷۰۴۲ با عنوان بررسی نرُم‌های مختلف در نمایش تُنگ در تاریخ ۱۳۹۵/۱۱/۱۲ در دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر برگزار و توسط هیات داوران مورد ارزشیابی قرار گرفت و نمره ۱۹ برابر درجه عالی برای آن تعیین گردید. به این ترتیب از این تاریخ نامبرده به عنوان کارشناس ارشد در رشته مذکور شناخته می شود.

نمره کسب شده	حداکثر نمره	موارد	موارد ارزشیابی
۲٫۷۵	۴	رعایت اصول نگارش انجام در تنظیم بخشهای مختلف، کیفیت تصاویر، جداول و اشکال، تنظیم فهرست ها، منابع و ماخذ	۱- کیفیت نگارش
۱۰	۱۰	بررسی تاریخچه و سابقه تجربی و نظری موضوع انجام منطقی در بخش های مختلف پایان نامه، ابتکار و نوآوری، اهمیت و ارزش علمی پایان نامه، استفاده از منابع معتبر و جدید، کیفیت تجزیه و تحلیل یافته ها و نتیجه گیری، روشن بودن روش کار، هدف ها و فرضیه های تحقیق، جدید بودن روش تحقیق	۲- کیفیت علمی
۴	۴	تسلط بر موضوع و بیان واضح و تفهیم آن، توانایی در پاسخگویی به سوالات مطرح شده در جلسه، رعایت زمان ارائه، روش ارائه	۳- کیفیت ارائه در جلسه دفاع
۱	۱	گزارش های دوره ای پیشرفت کار (حداقل ۴ مورد)	۴- ارزشیابی گزارشات
۰٫۲۵	۱	مقاله مستخرج از پایان نامه: این نمره به صورت زیر اختصاص می یابد (۱) چکیده کنفرانسی هر مورد ۰/۲۵ نمره تا سقف ۰/۵ نمره (۲) مقاله کامل در مجموع مقالات همایشهای معتبر یا مقاله در مجلات علمی-ترویجی معتبر پذیرفته شده یا چاپ شده هر مورد ۰/۵ نمره تا سقف ۱ نمره (۳) مقاله پذیرفته شده یا چاپ شده در مجلات علمی پژوهشی معتبر ۱ نمره (۴) مقاله ارسال شده مجلات علمی پژوهشی معتبر هر مورد ۰/۲۵ نمره تا سقف ۰/۵ نمره (۵) دستگاه ساخته شده دارای گواهی ثبت اختراع یا به سفارش سازمان ها تا سقف ۱ نمره (۶) دستگاه ساخته شده کاربردی که به تایید رئیس دانشکده رسیده باشد تا سقف ۰/۵ نمره	۵- خروجی پایان نامه
۱۹		جمع	

درجه معادل کسب شده: (از ۱۹ تا ۲۰ عالی) از ۱۸ تا ۱۸/۹۹ بسیار خوب از ۱۶ تا ۱۷/۹۹ خوب از ۱۴ تا ۱۵/۹۹ قابل قبول کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

مشخصات هیات دوران

ردیف	نام و نام خانوادگی	سمت	مرتبۀ علمی	محل کار	امضاء
۱	دکتر مهدی زعفرانی	استاد راهنما	استادیار	دانشگاه حکیم سبزواری	
۲	دکتر محمود امین طوسی	استاد راهنما	استادیار	دانشگاه حکیم سبزواری	
۳	دکتر عبدالله قلی زاده	استاد داور	استادیار	دانشگاه حکیم سبزواری	
۴	دکتر لیلی شریفان	نماینده تحصیلات تکمیلی	استادیار	دانشگاه حکیم سبزواری	

امضاء
رئیس دانشکده

امضاء
مدیر گروه

* این فرم از زمان پذیرش صورت تایپ شده تهیه، ارسال و در پایان نامه درج شود



سوگند نامه دانش آموختگان دانشگاه حکیم سبزواری

به نام خداوند جان و خرد کزین برتر اندیشه بر نگذرد

اینک که به خواست آفریدگار پاک، کوشش خویش و بهره گیری از دانش استادان و سرمایه های مادی و معنوی این مرز و بوم، توشه ای از دانش و خرد گردآورده ام، در پیشگاه خداوند بزرگ سوگند یاد می کنم که در به کارگیری دانش خویش، همواره بر راه راست و درست گام بردارم. خداوند بزرگ، شما شاهدان، دانشجویان و دیگر حاضران را به عنوان داورانی امین گواه می گیرم که از همه دانش و توان خود برای گسترش مرزهای دانش بهره گیرم و از هیچ کوششی برای تبدیل جهان به جایی بهتر برای زیستن، دریغ نورزم. پیمان می بندم که همواره کرامت انسانی را در نظر داشته باشم و ممنوعان خود را در هر زمان و مکان تا سر حد امکان یاری دهم. سوگند می خورم که در به کارگیری دانش خویش به کاری که باراه و رسم انسانی، آیین پرهیزگاری، شرافت و اصول اخلاقی برخاسته از ادیان بزرگ الهی، به ویژه دین مبین اسلام، مباینت دارد دست نیازم. همچنین در سایه اصول جهان شمول انسانی و اسلامی، پیمان می بندم از هیچ کوششی برای آبادانی و سرافرازی میهن و هم میهنانم فروگذاری نکنم و خداوند بزرگ را به یاری طلبم تا همواره در پیشگاه او و در برابر وجدان بیدار خویش و ملت سرافراز، بر این پیمان تا ابد استوار بمانم.

نام و نام خانوادگی: راضیه حامدی

تاریخ و امضا:

تأییدیه‌ی صحت و اصالت نتایج

باسمه تعالی

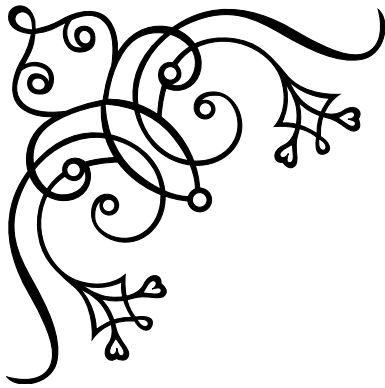
اینجانب راضیه حامدی به شماره دانشجویی ۹۳۱۳۱۳۷۰۴۲ دانشجوی رشته علوم تصمیم و مهندسی دانش مقطع تحصیلی کارشناسی ارشد تأیید می‌نمایم که کلیه نتایج این پایان‌نامه حاصل کار اینجانب و بدون هرگونه دخل و تصرف است و موارد نسخه برداری شده از آثار دیگران را با ذکر کامل مشخصات منبع ذکر کرده‌ام. در صورت اثبات خلاف مندرجات فوق، به تشخیص دانشگاه مطابق با ضوابط و مقررات حاکم (قانون حمایت از حقوق مؤلفان و مصنفان و قانون ترجمه و تکثیر کتب و نشریات و آثار صوتی، ضوابط و مقررات آموزشی، پژوهشی و انضباطی ...) با اینجانب رفتار خواهد شد و حق هرگونه اعتراض در خصوص احقاق حقوق مکتسب و تشخیص و تعیین تخلف و مجازات را از خویش سلب می‌نمایم. در ضمن، مسئولیت هرگونه پاسخگویی به اشخاص اعم از حقیقی و حقوقی و مراجع ذی صلاح (اعم از اداری و قضایی) به عهده‌ی اینجانب خواهد بود و دانشگاه هیچ گونه مسئولیتی در این خصوص نخواهد داشت.

نام و نام خانوادگی: راضیه حامدی

تاریخ و امضا:



تقدیم به:



پدر و مادرم



سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی کران خود، آدمی را زیور عقل آراست. در آغاز وظیفه خود می دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر مهدی زعفرانیه و جناب آقای دکتر محمود امین طوسی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی رسید.

همچنین لازم می دانم از گروه پارسی لانتک در پاسخگویی به مشکلات کاربران کمال قدردانی را داشته باشم. در پایان، بوسه می زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می کنم وجود مقدس شان را و تشکر می کنم از خانواده عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که بهترین پشتیبان من بودند.

راضیه حامدی

بهمن ۱۳۹۵

فهرست مطالب

ج	فهرست جداول
د	فهرست تصاویر
۱	چکیده
۲	پیش‌گفتار
۵	فصل ۱: تعاریف اولیه
۵	۱-۱ مقدمه
۵	۲-۱ ماتریس‌ها
۶	۳-۱ تحدب
۷	۴-۱ نُرم
۱۰	۵-۱ مسائل بدطرح
۱۱	۶-۱ نمایش تُنک
۱۱	۷-۱ ضرایب لاگرانژ
۱۸	فصل ۲: دستگاهای معادلات خطی تُنک
۱۹	۱-۲ سیستم‌های خطی فرومعیین
۲۱	۱-۱-۲ تعبیر هندسی برای نُرم l_p
۲۴	۲-۲ الگوریتم‌های حریم‌بندی
۲۵	۱-۲-۲ الگوریتم جستجوی تطابقی
۲۶	۲-۲-۲ الگوریتم جستجوی تطابقی متعامد
۲۷	۳-۲-۲ الگوریتم جستجوی تطابقی متعامد کمترین مربعات خطا

۳۰	الگوریتم‌های مبتنی بر بهینه‌سازی	۳-۲
۳۴	الگوریتم جستجوی پایه	۱-۳-۲
۳۵	الگوریتم حداقل مربعات وزن دهی شده تکرار	۲-۳-۲
۳۸	برخی از دیگر الگوریتم‌های حل نمایش تُتک	۴-۲
۳۸	الگوریتم نمونه‌برداری فشرده جستجوی تطابقی	۱-۴-۲
۳۹	الگوریتم جستجوی زیرفضا	۲-۴-۲
۴۰	الگوریتم منظم‌سازی نُرم یک	۳-۴-۲
۴۰	الگوریتم لاسو	۴-۴-۲
۴۳	الگوریتم هموارسازی نُرم صفر	۵-۴-۲

فصل ۳: کاربردهایی از نمایش تُتک

۴۶	مسئله فراتفکیک‌پذیری	۱-۳
۴۷	طبقه‌بندی تو مورهای سرطانی	۲-۳
۴۹	طبقه‌بندی تصاویر ابرطیفی	۳-۳

فصل ۴: روش پیشنهادی

۵۴	روش نُرم بلوکی	۱-۴
۵۷	نتایج آزمایشات در داده‌های مصنوعی	۱-۱-۴
۵۹	اعمال روش نُرم بلوکی در مسئله فراتفکیک‌پذیری	۲-۴
۶۰	جمع‌بندی	۳-۴

فهرست منابع

۶۵	پیوست آ: پیش‌شرط‌ساز
۷۸	پیوست ب: برنامه‌های متلب

فهرست جداول

- ۱-۴ مشخصات ماتریس $A_{n \times m}$ مورد استفاده در آزمایشات ۵۸
- ۲-۴ مقایسه روش‌های مختلف در افزایش وضوح تصاویر مختلف ۶۱

فهرست تصاویر

۹	چندوجهی	۱-۱
۱۴	مثالی از قيود مؤثر	۲-۱
۱۶	مثالی از صفحه مماس	۳-۱
۱۸	نوزدای از تصویر	۱-۲
۲۲	تعبیر هندسی نُرم l_p	۲-۲
۲۹	عملکرد الگوریتم‌های حربصانه در جمله‌های مربوط به خطای بازسازی l_2	۳-۲
۳۰	عملکرد الگوریتم‌های حربصانه در تشخیص بردار پشتیبان درست	۴-۲
۳۶	سطوح ثابت $x^T W x$	۵-۲
۳۷	عملکرد الگوریتم‌های مبتنی بر بهینه‌سازی در جمله‌های خطای بازسازی l_2	۶-۲
۳۸	عملکرد الگوریتم‌های مبتنی بر بهینه‌سازی در تشخیص بردار پشتیبان درست	۷-۲
۴۲	نمایش رگرسیون ریج و لاسو	۸-۲
۴۷	طبقه‌بندی تصویر کاج‌های هندی	۱-۳
۵۳	طبقه‌بندی تصویر کاج‌های هندی	۲-۳
۵۸	نتایج مقایسات مجموعه داده ۱ در جدول ۱-۴	۱-۴
۵۸	نتایج مقایسات مجموعه داده ۲ در جدول ۱-۴	۲-۴
۵۹	نتایج مقایسات مجموعه داده ۳ در جدول ۱-۴	۳-۴
۶۰	خروجی نامناسب روش OMP بر روی اولین شکل	۳-۴
۶۰	مقایسه میانگین مربعات خطا بین خروجی روش‌های مختلف و تصویر اصلی	۴-۴
۶۱	مقایسه مقدار نسبت سیگنال به نویز	۵-۴



دانشگاه گیلان

فرم چکیده ی پایان نامه ی دوره ی تحصیلات تکمیلی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

نام خانوادگی دانشجو: حامدی	نام:راضیه	ش. دانشجویی: ۹۳۱۳۱۳۷۰۴۲
استادان راهنما: دکتر مهدی زعفرانیه و دکتر محمود امین طوسی		
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر	رشته: علوم تصمیم و مهندسی دانش	
مقطع: کارشناسی ارشد	تاریخ دفاع: بهمن ۱۳۹۵	تعداد صفحات: ۸۴
عنوان پایان نامه: بررسی نُرم های مختلف در نمایش تُنک		
کلید واژه ها: نمایش تُنک، کدینگ تُنک، نُرم بلوکی، الگوریتم جستجوی تطابقی، تخمین تُنک		
<p>چکیده: نمایش تُنک در سال های اخیر به عنوان مدلی مناسب برای پردازش سیگنال های طبیعی کاربردهای فراوانی یافته است. بر پایه ی نمایش تُنک از میان تعداد زیادی سیگنال پایه، که در حالت کلی تعدادشان خیلی بیشتر از ابعادشان است، کمترین تعداد را برای بازنمایی سیگنال ورودی انتخاب می کنیم. اساسی ترین گام در نمایش تُنک، یافتن الگوریتمی کارا برای بدست آوردن تُنک ترین نمایش ممکن است. تفاوت اصلی این الگوریتم ها در نُرم مورد استفاده آن ها می باشد. در بسیاری، از نُرم صفر استفاده شده است. اما علی رغم سرعت بالای آن ها، بدلیل عدم تضمین جواب بهینه ناشی از ناهموار بودن نُرم صفر، در برخی دیگر از الگوریتم ها از نزدیک ترین نُرم محدب به آن، یعنی نُرم یک، استفاده می شود. در این نوشتار برای تقریب نُرم یک از نُرم بلوکی استفاده شده است. برای این منظور چگونگی بکارگیری نُرم بلوکی در حل بهینه سازی تُنک بیان شده و شیوه ی پیشنهادی با دو تا از روش های پایه ای بهینه سازی تُنک مورد مقایسه قرار گرفته است. نتایج آزمایشات روی داده های مصنوعی و در کاربرد فراتفکیک پذیری کارایی روش پیشنهادی را نشان داده است.</p>		

پیش‌گفتار

نمایش تُنک^۱ کاربردهای روزافزونی در مبحث پردازش تصویر و بینایی ماشین پیدا کرده است [۱، ۲]. موفقیت نمایش تُنک در این کاربردها از آنجا ناشی می‌شود که اکثر سیگنال‌های طبیعی مانند تصویر یا صدا با در نظر گرفتن پایه‌های مشخصی دارای نمایش تُنک هستند. در «بهینه‌سازی تُنک» هدف آن است که از بین تعداد زیادی سیگنال پایه - که در حالت کلی تعدادشان خیلی بیشتر از بعدشان است - کمترین تعداد برای نمایش یک سیگنال انتخاب شود. در نمایش تُنک، هر سیگنال پایه، اتم و مجموعه این سیگنال‌های پایه، دیکشنری^۲ نامیده می‌شود. دو مسئله مهم در نمایش تُنک مورد بحث است. یکی پیدا کردن دیکشنری فوق کامل مناسب برای یک کلاس مشخص از داده‌ها، و مسئله دوم، داشتن الگوریتم کارا برای بدست آوردن تُنک‌ترین نمایش سیگنال. فرض کنید ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ماتریس دیکشنری، و بردار $b \in \mathbb{R}^n$ سیگنال (تصویر یا داده آزمون) ورودی داده شده باشد. به بیان ریاضی، هدف پیدا کردن بردار ضرایب $x \in \mathbb{R}^m$ به نحوی است که در دستگاه معادلات خطی^۱ صدق کند:

$$Ax = b \quad (1)$$

همان‌طور که بیان شد، در نمایش تُنک سیگنال‌ها تعداد سیگنال‌های پایه خیلی بیشتر از بعد سیگنال است ($m \gg n$). در این حالت سیستم خطی^۱ فرومعی^۳ است، چرا که تعداد معادلات از مجهولات کمتر است؛ بنابراین سیستم بی‌شمار جواب دارد. یکی از روش‌هایی که برای حل آن وجود دارد افزودن قیدهایی به این معادله است. از بین بی‌شمار جوابی که معادله مورد نظر دارد تنها یکی از جواب‌ها مدنظر ماست، بسته به کاربرد می‌توان جوابی را انتخاب کرد که یک ویژگی منحصر به فرد داشته باشد. یک راه حل معمول برای این هدف، استفاده از شیوه منظم‌سازی^۴ می‌باشد. کمینه کردن نُرم جواب مورد نظر، از روش‌های مرسوم است که در حوزه یادگیری ماشین، برای جلوگیری از بیش‌برازش مدل نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد.

اگر شرطی که روی پاسخ گذاشته می‌شود کمینه کردن $\|x\|_p$ در نظر گرفته شود، در واقع به دنبال کمینه کردن

^۱Sparse ^۲Dictionary ^۳Underdetermined ^۴Regularization

انرژی جواب هستیم. در $\|x\|_p$ ، p می تواند بین یک تا بی نهایت ($1 \leq p \leq \infty$) تغییر کند [۳]. در این حالت مسئله محدب بوده و در نتیجه جواب بهینه محلی، بهینه سراسری نیز هست. در بسیاری از کاربردها مطلوب ما جوابی است که تا حد ممکن درایه‌ی صفر (یا نزدیک به صفر) داشته باشد. برای این هدف نرم صفر (l_0)، که بیانگر تعداد عناصر غیرصفر سیگنال x است مناسب است که با نماد $\|x\|_0$ نمایش داده می شود. نرم l_0 ، درکی راحت و آسان از تنگی ارائه می دهد. تنگ ترین پاسخ برای معادله ۱ با کمینه کردن رابطه زیر بدست می آید:

$$(p_0) : \min_x \|x\|_0 \quad \text{subject to} \quad b = Ax \quad (2)$$

در بسیاری از کاربردهای واقعی، سیستم $Ax = b$ با نویز n همراه است. لذا با تساوی $Ax = b + n$ مواجه هستیم. برای این منظور، به جای مسئله ۲ باید نسخه‌ی پایدار نسبت به نویز آن حل شود. بنابراین مسئله زیر تعریف می شود [۴]:

$$(p^\epsilon) : \min_x \|x\|_0 \quad \text{subject to} \quad \|b - Ax\|_2 \leq \epsilon \quad (3)$$

به این ترتیب با حل مسئله فوق، می توان یک تخمین از سیگنال بدون نویز b بصورت $\hat{b} = A\hat{x}$ که \hat{x} ، پاسخ مسئله ۳ است، بدست آورد.

برای حل رابطه ۳ تا کنون روش‌ها و الگوریتم‌های زیادی، همچون جستجوی تطابقی^۱، و جستجوی تطابقی متعامد^۲ پیشنهاد شده است. اساس این روش‌ها مبتنی بر تخمین مرحله به مرحله سیگنال با استفاده از اتم‌های دیکشنری است. این دو شیوه - که جزو الگوریتم‌های حریصانه محسوب می شوند - بصورت گام به گام یک یا چند اتم را که بیشترین همبستگی با باقی مانده مربوط به نمایش سیگنال دارند انتخاب کرده و با استفاده از آن‌ها این باقی مانده را به روز می کنند.

در [۳] اثبات شده است که نزدیک ترین نرم محدب به نرم صفر، نرم یک است و جوابی که از آن بدست می آید یکتاست. یکی از انواع نرم یک، نرم بلوکی است. تاکنون نرم بلوکی در بهینه سازی تنگ بکار برده نشده است. در این نوشتار هدف، تقریب نرم صفر مسئله ۳ با استفاده از نرم بلوکی و حل آن است.

در فصل اول تعاریف اولیه و مقدماتی که برای مطالعه این نوشتار مورد نیاز است، ارائه شده است. در فصل دوم مباحث پایه‌ای نمایش تنگ به همراه تعدادی از الگوریتم‌هایی که تاکنون برای بازیابی نمایش تنگ سیگنال‌ها ارائه شده است، به اختصار مرور شده است. این مباحث شامل قضایای یکتایی و پایداری تنگ ترین نمایش یک سیگنال و ارائه الگوریتم‌های برای حل نمایش تنگ است.

^۱Matching Pursuit

^۲Orthogonal Matching Pursuit

در فصل سوم، کاربردهایی از نمایش تَنک برای درک بهتر در حوزه طبقه‌بندی تصاویر معرفی شده است. فصل چهارم، به بیان روش پیشنهادی اختصاص یافته و سپس نتایج آزمایشات بر روی داده‌های مصنوعی آمده است، و به عنوان یک کاربرد، کارایی شیوه پیشنهادی در حوزه فراتفکیک‌پذیری^۱ نشان داده است.

^۱Super-Resolution

فصل ۱

تعاریف اولیه

۱-۱ مقدمه

در این فصل به تعاریف کلیدی از جمله ماتریس، تحدب، نُرم، ضرایب لاگرانژ، فضای آفین و مفهوم کلی نمایش تُنک، که در فصل‌های دیگر مورد استفاده قرار می‌گیرند، پرداخته می‌شود. اکثر این تعاریف از مراجع [۳] و [۵] استخراج شده است.

۲-۱ ماتریس‌ها

تعریف ۱-۲-۱ (ماتریس تُنک).^۲ در آنالیز عددی به ماتریسی گفته می‌شود که اکثر درایه‌های آن صفر هستند. بعنوان نمونه ماتریس زیر یک ماتریس تُنک است:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

تعریف ۱-۲-۲ (رتبه ماتریس). رتبه^۳ ماتریس عبارت است از بزرگترین عددی از ستون‌ها که مستقل خطی اند [۳].

^۲Sparse ^۳Rank

تعریف ۱-۲-۳ (اسپارک ماتریس). اسپارک^۱ ماتریس عبارت است از کوچکترین عددی از ستون‌ها که وابسته خطی اند [۳]. بعنوان مثال، اسپارک ماتریس ۱-۲-۱ برابر با (۳) است.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

تعریف ۱-۲-۴ (ماتریس رتبه کامل). یک ماتریس رتبه کامل^۲ نامیده می‌شود اگر تمام سطرها و ستون‌های آن مستقل خطی باشد [۳].

۳-۱ تحدب

تعریف ۱-۳-۱ (تحدب). مجموعه Ω محدب^۳ است، اگر $x_1, x_2 \in \Omega$ و $\forall \alpha \in [0, 1]$ ترکیب محدب $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$ نیز در مجموعه Ω باشد.

قضیه ۱-۳-۲. اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع محدب با دامنه محدب D باشد، آنگاه $r(x) = f(x) + g(x)$ نیز بر D محدب است.

قضیه ۱-۳-۳ (نیمه معین مثبت بودن ماتریس هسیان تابع $f(\cdot)$ محدب بودن آن را نتیجه می‌دهد). فرض کنید x یک بردار $1 \times n$ و $f(x)$ یک تابع اسکالر از n متغیر با مشتقات مرتبه دوم پیوسته با دامنه محدب D باشد. اگر ماتریس هسیان $\nabla^2 f(x)$ برای هر $x \in D$ نیمه معین مثبت باشد، آنگاه f محدب است.

تعریف ۱-۳-۴ (نقطه فرین). نقطه x در مجموعه محدب Ω یک نقطه فرین^۴ Ω نامیده می‌شود، اگر هیچ دو نقطه مجزای x_1, x_2 وجود نداشته باشند که به ازای α ای، $0 < \alpha < 1$ داشته باشیم $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$

^۱Spark ^۲Full rank ^۳Convex ^۴Extreme

۴-۱ نُرم

تعریف ۱-۴-۱. فرض کنید S مجموعه‌ای محدب و فشرده در فضای \mathbb{R}^n و شامل مبدا است. تابع گنج^۱ برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ نسبت به S ، $\gamma(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ، بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\gamma(x) := \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda S\} \quad (1-1)$$

در حالات خاص اگر مجموعه S یک چندبر $S = P^2$ باشد، یا نسبت به مبدا متقارن باشد، رابطه ۱-۱ به ترتیب بیانگر گنج چندوجهی^۳ و نُرم x نسبت به S می‌باشد. اما اگر در حالت خاص تر P نیز متقارن باشد، رابطه ۱-۱ نُرم بلوکی^۴ x نسبت به S خوانده می‌شود.

در اکثر موارد بجای $\gamma(x)$ از $\|x\|_\gamma$ استفاده می‌شود [۶].

لم ۲-۴-۱. فرض کنید γ بر طبق تعریف ۱-۴-۱ بیان شده باشد، برای تمام $x, y \in \mathbb{R}^n$ و هر $\alpha \in \mathbb{R}$ خواص زیر برقرار است [۵]:

$$\gamma(x) \geq 0, \quad (\gamma(x) = 0 \Leftrightarrow x = \underline{0}), \quad (2-1)$$

$$\gamma(\alpha x) = |\alpha| \gamma(x), \quad (3-1)$$

$$\gamma(x + y) \leq \gamma(x) + \gamma(y). \quad (4-1)$$

با توجه به اینکه تابع $\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ خواص ۱-۴ را ایجاب می‌کند، می‌توان مجموعه S را بصورت زیر بازنویسی کرد:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : \gamma(x) \leq 1\} \quad (5-1)$$

که توپ واحد یا مجموعه زیرسطح، سطح یک با توجه به γ نامیده می‌شود. از آنجاکه γ خواص ۱-۴ را ایجاب می‌کند، توپ واحد γ فشرده، محدب و شامل مبدا است که نسبت به مبدا متقارن است. هر نُرم γ متری را در فضای \mathbb{R}^n القا می‌کند.

تعریف ۳-۴-۱ (متر القا شده). فرض کنید γ یک نُرم در فضای \mathbb{R}^n و $x, y \in \mathbb{R}^n$. آنگاه متر القا شده توسط

^۱Gauge ^۲Polytope ^۳Polyhedral ^۴Block Norm

$\|\cdot\|_\gamma$ برای دو نقطه x, y بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\gamma(x, y) := \gamma(y - x) = \|y - x\|_\gamma \quad (6-1)$$

تعریف ۱-۴-۴. نُرم l_p خانواده خاص و پرکاربردی از نُرم‌ها است که بصورت زیر تعریف می‌شود [۶]:

$$\|x\|_{l_p} = l_p(x) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i^p| \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{for } p \in [1, \infty)$$

$$\|x\|_{l_\infty} = l_\infty(x) = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$$

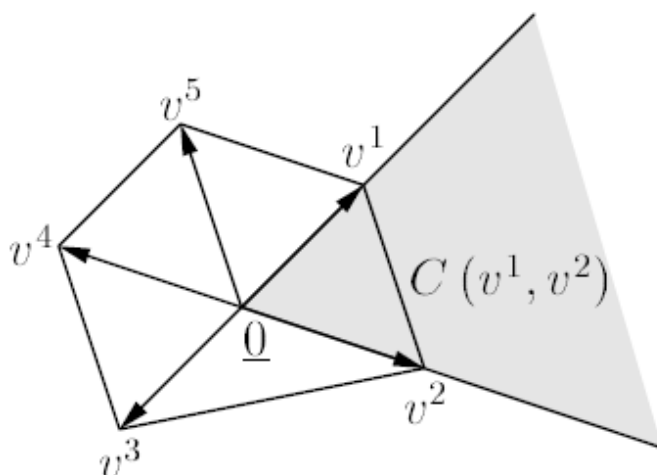
چنانچه در نُرم‌های معرفی شده، $p < 1$ باشد، آنگاه نُرم l_p خاصیت سوم از لم ۱-۴-۲ را دارا نیست. با توجه به روابط بالا نُرم صفر بصورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۱-۴-۵. (نُرم صفر). نُرم l_0 بصورت {تعداد عناصر غیر صفر بردار x } تعریف می‌شود [۶].

تعریف ۱-۴-۶. فرض کنید نقاط فرین P برابر با $\{v^1, \dots, v^\delta\} = ext(P)$ باشد. آنگاه v^1, \dots, v^δ بردارهای اساسی نامیده می‌شوند. نیم‌خط‌های d^1, \dots, d^δ که از مبدا شروع شده و از نقاط فرین می‌گذرند، یعنی $d_i = \{\lambda v^i : \lambda \geq 0\}$, $i = 1, \dots, \delta$ جهت‌های اساسی نامیده می‌شوند. فرض شده است که تمام بردارهای اساسی طول واحد دارند، $\|v_i\|_{l_2} = 1$, $i = 1, \dots, \delta$.

تعریف ۱-۴-۷. (مخروط اساسی). بردارهای اساسی تعریف شده توسط نقاط فرین P دهانه مخروط اساسی هستند که توسط بردارهای اساسی بصورت $C(v^i, v^j)$ تعریف می‌شوند. بعنوان مثال شکل ۱-۱ چندوجهی با پنج بردار اساسی را در فضای \mathbb{R}^2 نشان می‌دهد.

$^1 l_p$ Norm $^2 l_0$ Norm 3 Extreme



شکل ۱-۱: چندوجهی با پنج بردار اساسی و مخروط اساسی پوشش داده شده توسط بردارهای v^1 و v^2

لم ۱-۴-۸. فرض کنید P یک چندبر فشرده و محدب باشد، شامل مبدا در فضای داخلی، فرض کنید $ext(P) = \{v^1, \dots, v^\delta\}$ و $x \in \mathbb{R}^n$. آنگاه

$$\gamma(x) = \min \left\{ \sum_{i=1}^{\delta} \lambda_i : x = \sum_{i=1}^{\delta} \lambda_i v^i \text{ and } \lambda_i \geq 0 \forall i = 1, \dots, \delta \right\} \quad (7-1)$$

رابطه ۷-۱ نشان می‌دهد که مقدار γ در نقطه $x \in \mathbb{R}^n$ توسط یک مسئله برنامه‌ریزی خطی برای $\lambda_1, \dots, \lambda_\delta$ قابل حل است.

در ادامه گنج چندوجهی γ در فضای \mathbb{R}^2 بر اساس تعریف ۱-۳-۴، توپ واحد P ۱-۱-۲ و بردارهای اساسی $ext(P) = \{v^1, \dots, v^\delta\}$ را در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید $x \in \mathbb{R}^2$, $x \neq 0$ یک نقطه دلخواه است. چنانچه $x \in C(v^i, v^j)$ باشد، که $C(v^i, v^j)$ مخروط اساسی است، آنگاه تعریف محدب بودن مخروط ایجاب می‌کند که اسکالرهای منحصر بفرد λ_i و λ_j وجود دارند که $x = \lambda_i v^i + \lambda_j v^j$, $\lambda_i, \lambda_j \geq 0$ است. اگر v^i, v^j بردارهای اساسی باشند مخروط اساسی را تحت پوشش قرار می‌دهند، و همچنین اگر $x = \lambda_i v^i + \lambda_j v^j$ نمایش منحصر به فرد x در جمله‌های v^i, v^j با $\lambda_i, \lambda_j \geq 0$ باشد، آنگاه $x \in C(v^i, v^j)$. این مشاهدات در ادامه منجر به نمایش γ می‌شود.

لم ۱-۴-۹. فرض کنید γ گنج چندوجهی در فضای \mathbb{R}^2 و \mathbb{R}^2 در مخروط اساسی $C(v^i, v^j)$ باشد، همچنین در نظر بگیرید $x = \lambda_i v^i + \lambda_j v^j$ نمایش منحصر به فرد x در جمله‌های v^i, v^j باشد، آنگاه رابطه زیر

حاصل می‌شود:

$$\gamma(x) = \lambda_i + \lambda_j \quad (8-1)$$

برهان. مرجع [۶]

□

در این نوشتار نُرم l_p را به اختصار نُرم p می‌نویسیم و $\|\cdot\|_{l_p}$ را به صورت $\|\cdot\|_p$ نمایش می‌دهیم.

۵-۱ مسائل خوش طرح و بد طرح

مسائل خوش طرح^۱ طبق تعریف ارائه شده توسط ژاک هادامارد^۲ مسائلی است که دارای سه ویژگی زیر باشند:

• یک جواب برای آن وجود داشته باشد

• این جواب یکتا باشد

• رفتار راه حل بطور پیوسته با شرایط اولیه تغییر کند

مسئله ای که جزو مسائل خوش طرح نباشد، بد طرح^۳ است. مانند مسائل معکوس که اغلب جزو مسائل بد طرح هستند.

مسئله بد طرح زیر را در نظر بگیرید:

$$(p_p) : \min_x \|x\|_p^p \quad \text{subject to} \quad b = Ax \quad (9-1)$$

به منظور حل چنین مسائلی (۹-۱) از روش‌های منظم‌سازی استفاده می‌شود. منظم‌سازی در ریاضیات، آمار و به ویژه در شاخه‌هایی از یادگیری ماشین و مسائل معکوس برای فرآیند به‌کارگیری اطلاعات اضافی به منظور حل مسائل بد طرح، مطرح می‌شود.

تعریف ۱-۵-۱ (روش منظم‌سازی تیخونوف). روش منظم‌سازی تیخونوف^۴ به افتخار آندری تیخونوف نام گذاری شده است و یک روش رایج به کارگیری منظم‌سازی برای مسائل بد طرح است. این روش همچنین با

^۱Well-posed

^۲Jacques Hadamard

^۳Ill-posed

^۴Tykhonov regularization

نام‌های ریج رگرسیون^۱ و تیخونوف-میلر یا روش معکوس خطی مقید نیز عنوان می‌شود. این روش متناظر با حل مسئله بهینه‌سازی زیر است:

$$\min_x \|b - Ax\|_2^2 + \lambda \|x\|_2^2$$

که در آن λ یک عدد مثبت است، که میزان اهمیت^۲ بین نرْم و تابع خطا را مشخص می‌کند و بنابراین منظم‌سازی را نیز کنترل می‌کند.

۶-۱ نمایش تنک

انتقال سیگنال‌ها (فضای بردارهای ویژگی) به یک فضای جدید با خواص مطلوب، یک رویکرد رایج برای بهبود کارایی، در اکثر حوزه‌ها از قبیل خوشه‌بندی و ارتقا سیگنال می‌باشد. جهت این انتقال یک سری بردارهای پایه مورد نیاز است که این بردارهای پایه در برخی تبدیل‌ها مثل تبدیل فوریه، ثابت هستند و به زمینه (داده) وابسته نیستند. در مقابل، برخی تبدیل‌ها مثل نمایش تنک، بردارهای پایه‌ی وابسته به زمینه (داده) دارند. بر این اساس تعاریف زیر بیان می‌شود.

تعریف ۱-۶-۱ (اتم). به بردارهای پایه در رویکرد نمایش تنک، اتم^۳ می‌گویند.

تعریف ۲-۶-۱ (دیکشنری). به ماتریسی که ستون‌های آن شامل پایه‌ها یا اتم‌ها در تعریف ۱-۶-۱ است، دیکشنری^۴ می‌گویند.

تعریف ۳-۶-۱ (یادگیری دیکشنری). عمل استخراج بردارهای پایه، اغلب یادگیری دیکشنری^۵ نامیده می‌شود.

تعریف ۴-۶-۱ (کدگذاری تنک). کدگذاری تنک^۶، بردارهای داده را بصورت ترکیب خطی مینیمم تعداد از اتم‌های دیکشنری بیان می‌کند.

۷-۱ ضرایب لاگرانژ

در این بخش به بررسی روش‌های حل مسائل بهینه‌سازی مقید^۷ پرداخته می‌شود. فرم کلی مسئله بهینه‌سازی مقید بصورت زیر است:

^۱Ridge regression ^۲Trade off ^۳Atom ^۴Dictionary ^۵Dictionary learning ^۶Sparse coding
^۷Constrained optimization problem

$$\begin{array}{l} \min f(x_1, \dots, x_n) \\ \text{subject to} \end{array} \left. \begin{array}{l} g_1(x_1, \dots, x_n) \leq 0, \\ \vdots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) \leq 0, \\ h_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ h_k(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ x_1 \in D_1, \dots, x_n \in D_n \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{تابع هدف} \\ \text{قیود نامساوی} \\ \text{قیود تساوی} \\ \text{قیود دامنه ای} \end{array}$$

و فرم برداری این مسائل بصورت زیر است:

$$\begin{array}{l} \min f(x) \\ h(x) = 0, \\ g(x) \leq 0 \\ x \in D \end{array} \quad (10-1)$$

قیود تساوی $h(x) = 0$ در مسئله بهینه‌سازی فوق، قیود تساوی می‌نامند. اگر مسئله بهینه‌سازی تنها شامل قیود تساوی باشد، آنگاه می‌توان از روش لاگرانژ ارائه شده در تعریف ۱-۷-۱ برای حل آن استفاده کرد. **تعریف ۱-۷-۱** (روش لاگرانژ). روش لاگرانژ جهت حل مسائل بهینه‌سازی مقید، دستورالعملی است که در آن تابعی را که شامل ترکیبی از تابع هدف و شرایط مقید تساوی است بهینه می‌کند. تابع ترکیبی بدست آمده را تابع لاگرانژ می‌نامند. تابع لاگرانژ بصورتی است که موارد زیر را تضمین می‌کند:

- وقتی به حداکثر یا حداقل می‌رسد تابع هدف اصلی نیز حداقل یا حداکثر خواهد شد.
- تمامی شرایط قیود تامین می‌شود.

قدم اول برای حل مسئله بهینه‌سازی به روش لاگرانژ، جمع آوری تمامی جملات قیود در یک طرف تساوی است. در گام بعدی تابع قید را در ضریب مجهول λ ضرب نموده و به تابع هدف اضافه می‌نماییم. به تعداد قیود

مسئله مقادیر مختلف λ داریم. و در مرحله آخر، نسبت به λ و x مشتق گرفته و مساوی صفر قرار می دهیم (۱۱-۱)

$$l(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T h(x)$$

$$\nabla_x l(x, \lambda) = 0$$

$$\nabla_\lambda l(x, \lambda) = 0 \quad (11-1)$$

مثال ۱-۷-۲. تابع $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ را با قید $x_1^2 + x_2^2 = 1$ مینیمم کنید.

با استفاده از روش لاگرانژ قید تساوی برابر است با: $h(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$ که با ضریب لاگرانژ وارد

تابع هدف می شود:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda \cdot h(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

نسبت به متغیرها مشتق گرفته می شود:

$$\nabla_{x_1, x_2, \lambda} L(x_1, x_2, \lambda) = \left(\frac{\partial L}{\partial x_1}, \frac{\partial L}{\partial x_2}, \frac{\partial L}{\partial \lambda} \right)$$

$$= (1 + 2\lambda x_1, 1 + 2\lambda x_2, x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

$$\nabla_{x_1, x_2, \lambda} L(x_1, x_2, \lambda) = 0 \Leftrightarrow x = \begin{cases} 1 + 2\lambda x_1 = 0 \\ 1 + 2\lambda x_2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

رابطه زیر برقرار است:

$$x_1 = x_2 = -\frac{1}{2\lambda}, \quad \lambda \neq 0$$

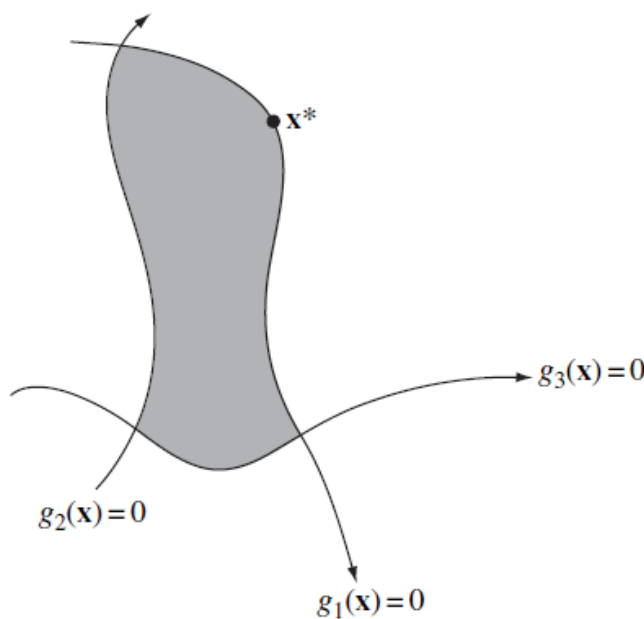
با توجه به معادله آخر رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} - 1 = 0$$

بنابراین $\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ است. نقاط بدست آمده برابرند با $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ ، $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ از این رو مقدار مینیمم

تابع f برابر است با $-\sqrt{2}$ با $f(-\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}) = -\sqrt{2}$

قیود نامساوی در حالت کلی مسئله بهینه سازی مقید، شامل قیود نامساوی است. قید نامساوی به صورت $g_i(x) \leq 0$ در یک نقطه ممکن x مؤثر^۱ نامیده می شود، اگر $g_i(x) = 0$ و در x نامؤثر خوانده می شود اگر $g_i(x) < 0$ قیود مؤثر در یک نقطه ممکن x موجب تحدید ناحیه ممکن در همسایگی های x می شوند، در حالی که قیود نامؤثر در همسایگی های x هیچ تأثیری ندارند. بنابراین در بررسی خواص یک نقطه مینیمم موضعی می توان تنها به قیود مؤثر توجه نمود. این موضوع در شکل ۱-۲ نشان داده شده است، که در آن خواص موضعی که جواب x^* در آنها صدق می کند به وضوح وابسته به قیود نامؤثر g_2 و g_3 نیستند. اگر قیود مؤثر در نقطه جواب مسئله ۱-۱۰ از قبل معلوم باشند، جواب یک نقطه مینیمم موضعی مسئله خواهد بود که با حذف قیود نامؤثر و در نظر گرفتن همه قیود مؤثر بعنوان قیود تساوی مشخص می شود.



شکل ۱-۲: مثالی از قیود مؤثر

در این صورت روش حل زیر را می توان بکار برد:

شرایط لازم مرتبه اول فرض کنید x^* نقطه ای است که در قیود زیر صدق می کند:

$$h(x^*) = 0 \quad g(x^*) \leq 0 \quad (12-1)$$

^۱Active

و J مجموعه اندیس‌های j است، بطوریکه $g_i(x^*) = 0$. در این صورت x^* را یک نقطه منتظم برای قیود ۱-۱۲ می‌نامند اگر بردارهای گرادیان $\nabla h_i(x^*)$, $\nabla g_j(x^*)$, $j \in J$, $1 \leq i \leq k$ ، مستقل خطی باشند.

شرایط کاروش-کوهن-تاکر (KKT) ^۱ فرض کنید x^* نقطه مینیمم نسبی برای مسئله مینیمم‌سازی $f(x)$ با قیود $g(x) \leq 0$ و $h(x) = 0$ باشد، و فرض کنید x^* یک نقطه منتظم برای قیود است. در این صورت برداری چون $\lambda \in \mathbb{R}^k$ و برداری مانند $\mu \in \mathbb{R}^m$ با ضابطه $\mu \geq 0$ وجود دارند بطوری که روابط زیر برقرار است:

$$\nabla f(x^*) + \lambda^T \nabla h(x^*) + \mu^T \nabla g(x^*) = 0 \quad (13-1)$$

$$\mu^T g(x^*) = 0 \quad (14-1)$$

اگر $\mu < 0$ باشد، آن قید جزو قیود مؤثر نیست، در این حالت μ برابر صفر قرار می‌گیرد.

شرایط لازم مرتبه دوم فرض کنید f, h دوبرار مشتق‌پذیر باشند، فرض کنید که x^* یک نقطه موضعی f مقید $h(x) = 0$ و

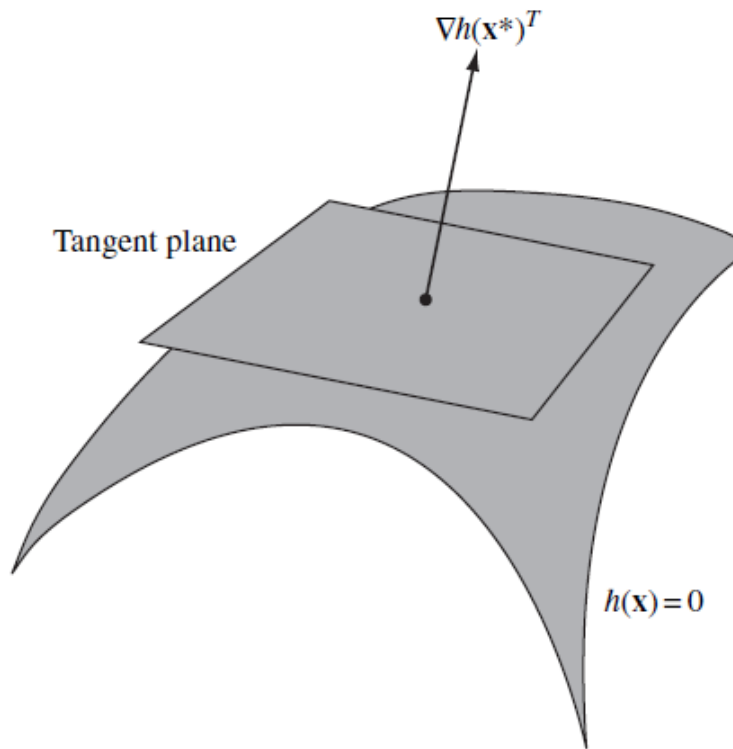
یک نقطه منتظم برای این قیود است. در این صورت $\lambda \in \mathbb{R}^k$ وجود دارد به طوری که رابطه زیر برقرار است:

$$\nabla f(x^*) + \lambda^T \nabla h(x^*) = 0 \quad (15-1)$$

اگر M صفحه مماس بر شرایط مسئله ۱-۱۰ باشد (همانند آنچه در شکل ۱-۳ نشان داده شده است). آنگاه ماتریس L بر M نیمه معین مثبت است، یعنی $y^T L(x^*) \geq 0$ به ازای هر $y \in M$ است.

$$L(x^*) = F(x^*) + \lambda^T H(x^*)$$

^۱The Karush-Kuhn-Tucker conditions



شکل ۱-۳: مثالی از صفحه مماس

شرایط کافی مرتبه دوم فرض کنید f, g, h دوبار مشتق پذیر باشند. شرایط کافی برای اینکه یک نقطه x^* که در رابطه $g(x^*) \leq 0, h(x^*) = 0$ صدق می کند، نقطه مینیمم نسبی اکیدی برای مسئله ۱-۱۰ باشد آن است که $\lambda \in \mathbb{R}^k, \mu \in \mathbb{R}^k$ وجود داشته باشند به طوری که

$$\mu \geq 0 \quad (16-1)$$

$$\mu^T g(x^*) = 0 \quad (17-1)$$

$$\nabla f(x^*) + \lambda^T \nabla h(x^*) + \mu^T \nabla g(x^*) = 0 \quad (18-1)$$

و ماتریس هسین

$$L(x^*) = F(x^*) + \lambda^T H(x^*) + \mu^T G(x^*) \quad (19-1)$$

بر زیرفضای

$$M' = \{y : \nabla h(x^*)y = 0, \nabla g_j(x^*)y = 0\} \quad (20-1)$$

برای همه $j \in J$ که در آن

$$J = \{j : g_j(x^*) = 0, \mu_j > 0\}$$

معین مثبت باشد. ممکن است در یک مسئله بهینه سازی قيود بصورت بزرگتر از صفر باشند و یا هدف ماکزیمم کردن باشد، در اینگونه موارد نیز با دستکاری های ریاضی مسئله را به فرم کلی تبدیل می کنند. برای مطالعه بیشتر به مرجع [۷] مراجعه کنید.

تعریف ۱-۷-۳ (ماتریس معین مثبت متقارن). سیستم $Ax = b$ را در نظر بگیرید که $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ یک ماتریس متقارن است اگر $A = A^T$ و برای هر بردار غیر صفر x ، $x^T Ax > 0$ آنگاه A ماتریس معین مثبت متقارن با مقادیر مثبت است. این سیستم، با شرایط ذکر شده را سیستم خطی معین مثبت متقارن^۱ می نامند.

تعریف ۱-۷-۴ (مقادیر ویژه و بردارهای ویژه). دستگاه معادلات $A_{n \times n} X_{n \times 1} = b_{n \times 1}$ را در نظر بگیرید. این سیستم را می توان نگاشتی در فضای برداری \mathbb{R}^n در نظر گرفت، که هر بردار X را به یک بردار b تبدیل می کند، در بین این نگاشت ها مواردی وجود دارند که تنها اندازه بردار X تغییر می کند و امتداد آن حفظ می گردد، به عبارتی بردار b بصورت مضربی از بردار X تعریف می گردد. در این صورت نگاشت حاصل به شکل زیر تعریف می شود:

$$AX = \lambda X \quad (21-1)$$

به بردارهای X_i غیر صفر که چنین خاصیتی را دارند بردار ویژه^۲ ماتریس $A_{n \times n}$ گویند و ضریب λ_i را مقادیر ویژه^۳ ماتریس $A_{n \times n}$ می نامند.

تعریف ۱-۷-۵ (فضای آفین). در ریاضیات، فضای آفین^۴ ساختار هندسی است که ویژگی های فضای اقلیدسی را تعمیم می دهد. که مستقل از مفاهیم فاصله و اندازه گیری زاویه هستند، و تنها خواص مربوط به موازی بودن را نگه می دارند. در یک تبدیل آفین خطوط موازی موازی باقی می مانند.

این فصل شامل مفاهیم و تعاریف اولیه بود که پیش نیاز مفاهیم فصل های بعدی است. در بخش ۱-۳ مفهوم کلی نمایش تَنک به اختصار بیان شد. در فصل بعد مسئله نمایش تَنک بطور کامل معرفی خواهد شد و برخی روش های مختلفی که تاکنون برای حل آن بکار برده شده است، مورد بررسی قرار می گیرد.

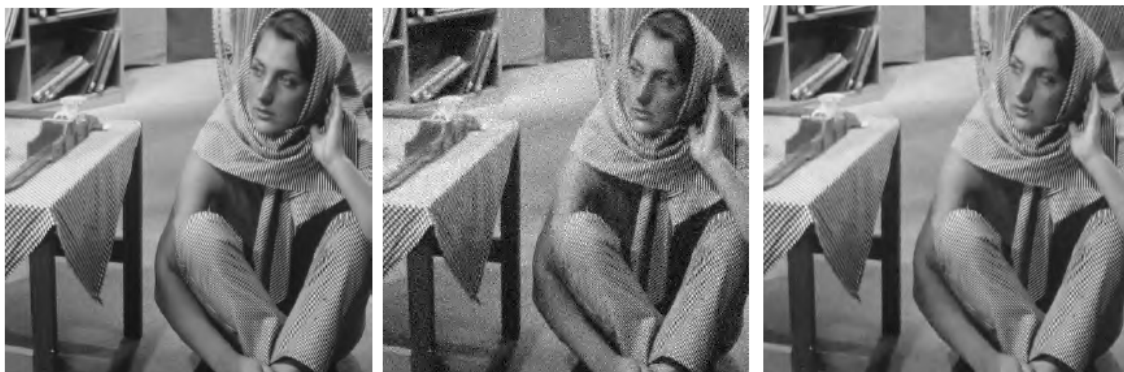
^۱Symmetric positive definite linear system ^۲Eigenvector ^۳Eigenvalues ^۴Affine space

فصل ۲

دستگاه‌های معادلات خطی تُنک

در سالیان اخیر نمایش تُنک کاربردهای متنوعی در پردازش سیگنال پیدا کرده است. نتایج موفقیت‌آمیز این نمایش در زمینه‌های یادگیری ماشین، طبقه‌بندی تصاویر، فراتفکیک‌پذیری تصویر، نویززدایی تصویر و... سبب شده است تا انواع روش‌های حل آن مورد بررسی قرار گیرد. یک تفاوت اصلی این روش‌ها در نوع نُرم بکار گرفته شده در فرمول‌بندی مسئله می‌باشد.

تمامی کاربردهای پردازش سیگنال مبتنی بر اتخاذ یک مدل مناسب برای سیگنال‌ها است. بعنوان مثال مسئله نویززدایی از سیگنال‌ها (در اینجا تصاویر) را در نظر بگیرید. در این مسئله یک نسخه آغشته به نویز از یک سیگنال موجود است، هدف بازیابی سیگنال بدون نویز مطلوب است. شکل ۱-۲ نمونه‌ای از این کاربرد را نشان می‌دهد.



شکل ۱-۲: نویززدایی از تصویر، به ترتیب از چپ به راست: تصویر اصلی، تصویر دارای نویز و تصویر بازیابی شده مطلوب

در این کاربرد برای بازسازی تصویر نویزی ویژگی‌هایی از تصاویر بدون نویز استخراج کرده که بعنوان سیگنال‌های پایه در ماتریس دیکشنری ذخیره می‌شوند. نمایش تُنک بر این اساس قادر است، باترکیب خطی تعداد محدودی از این سیگنال‌های پایه یا به عبارتی اتم‌های دیکشنری هر تصویری را بازسازی کند. از این رو به دلیل اینکه تصویر

خروجی از روی تصاویر بدون نویز بازسازی شده است، منجر به اثر نویززدایی در تصویر ورودی شده است. فرض کنید b تصویر ورودی به نمایش تُنک است. ماتریس دیکشنری هم از ویژگی‌های مجموعه تصاویر بدون نویز آموزشی استخراج شده است، آنگاه هدف در این نمایش یافتن بردار ضرایب x بصورتی است که بردار ضرایب تا حد امکان تُنک باشد، در نتیجه Ax بازسازی شده تصویر b ورودی است. حال ممکن است سیگنال b دقیقاً از رابطه $Ax = b$ بدست نیاید، در این صورت هدف پیدا کردن x است که $b - Ax$ کمترین مقدار را داشته باشد. برای حل این رابطه مشکلاتی وجود دارد که در ادامه بیان خواهد شد، و تا کنون روش‌های حل زیادی برای آن ارائه شده است که وابسته به نُرم بکار گرفته شده در آن‌ها متفاوت هستند. در فصل قبل اشاره مختصری به مفهوم نمایش تُنک، دیکشنری و اتم شد، در این فصل، مسئله نمایش تُنک از نظر تئوری مورد بررسی قرار خواهد گرفت و سپس برخی از روش‌ها و الگوریتم‌های پرکاربرد، برای حل این نمایش بیان می‌شود.

۱-۲ سیستم‌های خطی فرومعیین^۱

ماتریس رتبه کامل^۲، $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ و بردار $b \in \mathbb{R}^n$ را در نظر بگیرید. به بیان ریاضی هدف محاسبه بردار $x \in \mathbb{R}^m$ از دستگاه معادلات خطی زیر است:

$$Ax = b \quad (1-2)$$

در این حالت ممکن است وضعیت‌های گوناگونی برای ماتریس A و بردار x بوجود آید که هر یک را مورد بررسی قرار می‌گیرد.

زمانیکه $m = n$ است، جواب دستگاه ۱-۲ یکتا بوده و به راحتی از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$x = A^{-1}b = A^T b$$

در این وضعیت گرچه پاسخی یکتا برای نمایش بردار x بدست می‌آید، اما در بسیاری از موارد این جواب تُنک نیست.

^۱Underdetermined linear systems

^۲Full rank

چنانچه $m = n$ باشد و ماتریس A یک ماتریس نامتقارن با بعد بزرگ و تُتک باشد، دستگاه معادلات ۱-۲ با روش‌های ارائه شده در پیوست (آ) بخش پیش‌شرط‌سازها قابل حل است.

اگر $m > n$ باشد، تعداد سیگنال‌های پایه خیلی بیشتر از بعد سیگنال است. در این حالت سیستم خطی ۱-۲ فرومعیّن است، چرا که تعداد معادلات از مجهولات کمتر است بنابراین سیستم بی‌شمار جواب دارد، و جزو مسائل NP-hard است، که تاکنون برای آن‌ها راه حل سریع و قابل انجام در زمان چندجمله‌ای پیدا نشده است و به احتمال زیاد در آینده نیز یافت نخواهد شد. این که راه حل سریعی برای آن‌ها وجود ندارد هم اثبات نشده است. البته ثابت شده است که اگر فقط برای یکی از این مسئله‌ها راه حل سریعی پیدا شود، این راه حل موجب حل سریع بقیه مسئله‌ها خواهد شد.

در پردازش تصویر، صوت، و در حالت کلی پردازش سیگنال، یکی از روش‌هایی که برای حل این رابطه وجود دارد افزودن قیدهایی به این معادله است که در ادامه روش حل آن را بر اساس یکی از مراجع این پایان‌نامه [۳] بیان کرده و کاربرد آن را در فصول بعدی بررسی خواهیم کرد.

همانطور که اشاره شد دستگاه معادلات ۱-۲ با شرایط $m > n$ بی‌نهایت جواب دارد که تنها یکی از این جواب‌ها مدنظر ماست، بسته به کاربرد می‌توان جوابی را انتخاب کرد که یک ویژگی منحصر به فرد داشته باشد، به عنوان مثال جواب با حداقل انرژی. انتخاب یک جواب با ویژگی خاص همان رگولاریزه کردن (منظم‌سازی) این دستگاه معادلات است. به عبارت دقیق‌تر، اگر تابع $J: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ، تشویق‌کننده ویژگی موردنظر ما باشد، یک راه حل خیلی آشنا برای این هدف توابع منظم‌سازی هستند. مانند تابع $J(x)$ ، که شرایط مطلوب برای شدنی بودن x را ارزیابی می‌کند. بنابراین رابطه ۱-۲ تبدیل به رابطه زیر می‌شود:

$$(p_J) : \min_x J(x) \quad \text{subject to} \quad b = Ax \quad (2-2)$$

کمینه کردن نُرم جواب مورد نظر، از روش‌های مرسوم است که در حوزه یادگیری ماشین، برای جلوگیری از بیش‌برازش مدل نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این حالت $J(x)$ برابر با مربع نُرم اقلیدسی $\|x\|_2^2$ ، در نظر گرفته می‌شود، که این همان منظم‌سازی تیخونوف است. در این حالت مسئله محدب بوده و در نتیجه جواب بهینه محلی، بهینه سراسری نیز هست.

اما در بسیاری از کاربردها مطلوب ما جوابی است که تا حد ممکن درایه‌ی صفر (یا نزدیک به صفر) داشته باشد. برای این هدف نُرم صفر، که بیانگر تعداد عناصر غیرصفر سیگنال x است مناسب کار ما است که با نماد $\|x\|_0$ ، ℓ_0 نمایش داده می‌شود. بسیاری از سیگنال‌های طبیعی از جمله تصویر و سیگنال صحبت در یک دیکشنری مناسب نمایشی تُتک دارند، به عبارت دیگر بعد واقعی آن‌ها خیلی کمتر از بعد ظاهری آن‌ها است.

نرم ℓ_0 ، درکی راحت و آسان از تُنکی ارائه می‌دهد. که تُنک‌ترین پاسخ برای معادله ۱-۲ با کمینه کردن رابطه زیر بدست می‌آید:

$$(p_0) : \min_x \|x\|_0 \quad \text{subject to} \quad b = Ax \quad (3-2)$$

بطور کلی، دسته‌ای از توابع که مسئله ما را به سمت تُنکی میل می‌دهد، بصورت $J(x) = \|x\|_p^p$ با $0 \leq p \leq 1$ است. به استثنای $p = 1$ که متناظر با نُرم یک است، بقیه‌ی این توابع خاصیت دوم از تعریف بیان شده در قسمت ۱-۴-۲ در مورد نُرم را نداشته و عموماً شبه نُرم^۱ خوانده می‌شوند. با این انتخاب، مسئله متناظر به فرم زیر است:

$$(p_p) : \min_x \|x\|_p^p \quad \text{subject to} \quad b = Ax \quad (4-2)$$

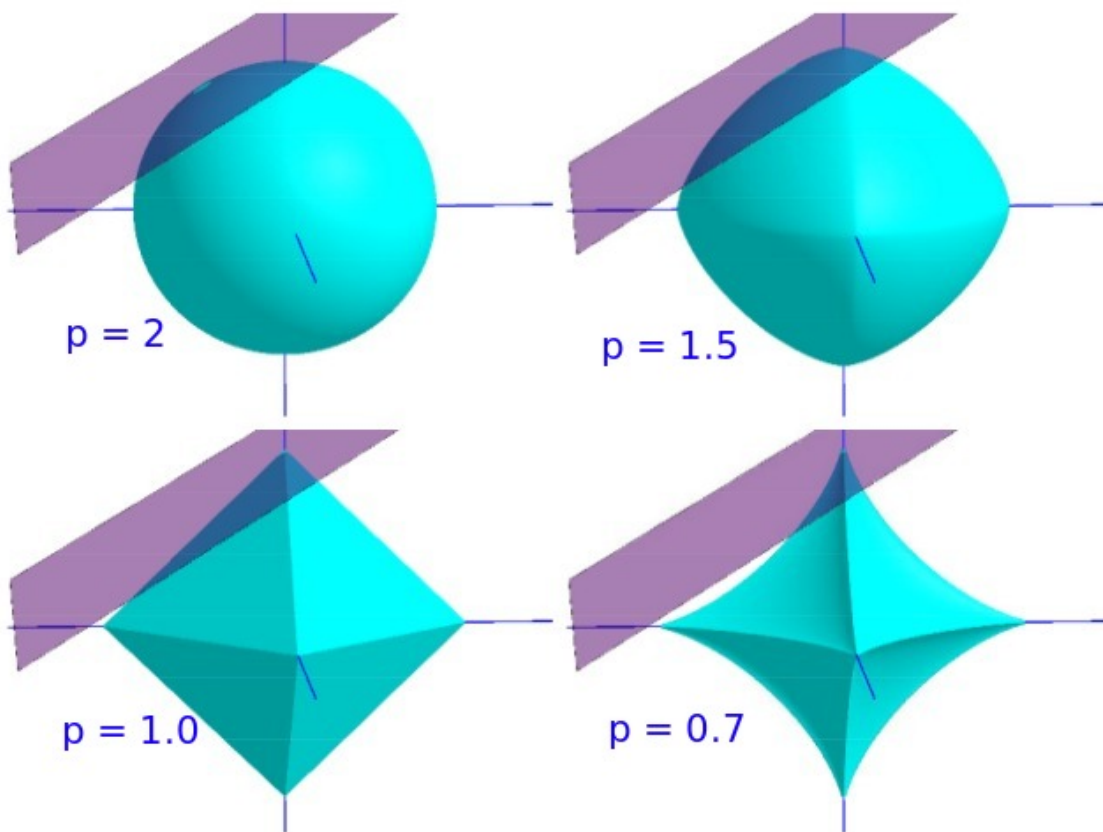
در حالت خاص نُرم ℓ_∞ و نُرم ℓ_1 بسیار جالب و محبوب هستند. البته باید شرایط ویژه‌ای وجود داشته باشد که از نُرم یک استفاده شود، زیرا باعث تراکم در تُنکی پاسخ می‌شود [۸]. در ادامه یک تعبیر هندسی از تمایل این دسته از توابع به تولید جواب‌های تُنک بیان می‌شود [۸].

۱-۱-۲ تعبیر هندسی برای نُرم ℓ_p

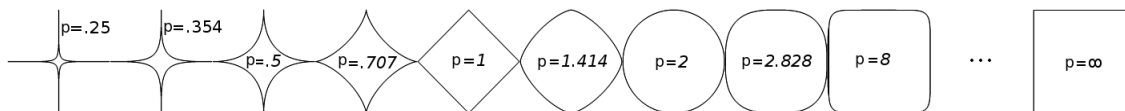
برای بدست آوردن جواب معادله ۱۹-۲ از دید هندسی، باید اصطلاحاً توپ‌های ℓ_p را، که بصورت سطوح $\|x\|_p = cte$ تعریف می‌شوند، به تدریج بزرگ کرد (به تعبیری در آن‌ها دمید)، تا جائیکه اولین برخورد با زیرفضای آفین ذکر شده حاصل شود.

برای فهم بیشتر شکل ۲-۲ را ببینید. در این شکل، فصل مشترک زیرفضای آفین متناظر با $Ax = b$ با توپ‌های ℓ_p برای چند مقدار مختلف p نشان داده شده است. با دقت در شکل ۲-۲ دو نکته را می‌توان نتیجه گرفت. اول اینکه، مشاهده می‌کنید هر چه p به سمت صفر میل می‌کند، به پاسخ‌های تُنک‌تری می‌رسیم و دوم اینکه، نُرم یک نیز به عنوان بهترین تقریب محدب شبه نُرم صفر، منجر به پاسخ‌های تُنکی می‌شود. مطابق قضیه ۱-۱-۲ تُنک بودن سیگنال x با استفاده از حل رابطه ۲-۳ تضمین می‌شود.

^۱Pseudo norm



شکل ۲-۲: تقاطع بین توپ‌های نرم ℓ_p و سیستم $Ax = b$ را با استفاده از حل P_p در فضای سه بعدی نشان می‌دهد



یکتایی پاسخ تُنک

قضیه ۲-۱-۱ (یکتایی-اسپارک ماتریس). اگر سیستم خطی $Ax = b$ یک پاسخ x دارد که از $\|x\|_p < \infty$ ، $spark(A)/2$ پیروی می‌کند، این جواب لزوماً تا حد امکان تُنک است [۳].

□

برهان. اثبات [۳].

در علم کامپیوتر جستجوی ترکیبیاتی، الگوریتم‌های جستجو را برای حل مسائلی که به طور کلی نیاز به جستجو در فضای پاسخ بزرگی دارند، مورد مطالعه قرار می‌دهد. طبق قضیه ۲-۱-۱ برای اثبات یکتایی پاسخ تُنک، محاسبه اسپارک یک ماتریس نیز نیازمند یک جستجوی ترکیبیاتی است. یک راه بسیار ساده برای تضمین یکتایی تُنک‌ترین جواب استفاده از همبستگی متقابل^۱ بین اتم‌های دیکشنری است [۹].

^۱Mutual-coherence

تعریف ۲-۱-۲ (همبستگی متقابل). همبستگی متقابل یک ماتریس عبارت است از ماکزیمم قدر مطلق ضریب همبستگی بین ستون‌های متمایز آن. بیان ریاضی این تعریف بصورت زیر می‌باشد:

$$\mu(A) = \max_{i \neq j} \frac{|a_i^T a_j|}{\|a_i\|_2 \|a_j\|_2} \quad (5-2)$$

به این ترتیب، همبستگی متقابل، کمیتی برای ارزیابی وابستگی خطی بین ستون‌های یک ماتریس است. برای ماتریس واحد که ستون‌ها دوجه دو متعامد هستند، همبستگی متقابل صفر است [۳].

می‌توان نشان داد که رابطه‌ی بین اسپارک و همبستگی متقابل یک ماتریس بصورت $\text{spark}(A) \geq 1 + \frac{1}{\mu(A)}$ است. قضیه یکتایی با استفاده از همبستگی متقابل بصورت زیر بیان می‌شود:

قضیه ۲-۱-۳ (یکتایی-همبستگی متقابل). اگر سیستم خطی $Ax = b$ یک پاسخ x داشته باشد که در $\|x\|_0 < \frac{1}{\mu(A) + 1}$ صدق کند، آنگاه لزوماً x تنگ‌ترین جواب این دستگاه معادلات خواهد بود.

برهان. اثبات [۳]

□

در بسیاری از کاربردهای واقعی، سیستم $Ax = b$ دارای نویز n است. بنابراین با تساوی $Ax = b + n$ مواجه هستیم. در این وضعیت برای پایداری پاسخ، باید در ابرکری $\|b - Ax\|_2 \leq \varepsilon$ به دنبال تنگ‌ترین پاسخ بود. برای این منظور، به‌جای مسئله ۲-۳ باید نسخه‌ی پایدار نسبت به نویز آن را حل کرد، این رابطه بصورت زیر بازنویسی می‌شود [۴]:

$$(p^\varepsilon) : \min_x \|x\|_0 \quad \text{subject to} \quad \|b - Ax\|_2 \leq \varepsilon \quad (6-2)$$

به این ترتیب با حل مسئله فوق، می‌توان یک تخمین از سیگنال بدون نویز b بصورت $\hat{b} = A\hat{x}$ که \hat{x} پاسخ مسئله ۴-۱ است، بدست آورد. سوال اساسی که اینجا مطرح می‌شود این است که برای یک سطح نویز کوچک، آیا پاسخ تنگی که از حل مسئله ۴-۱ بدست می‌آید (x^ε)، در فاصله کمی از x قرار دارد یا خیر؟ پاسخ مثبت به این سوال به مفهوم پایداری مسئله مذکور است.

برای حل رابطه ۲-۳ تا کنون روش‌ها و الگوریتم‌های زیادی، همچون جستجوی تطابقی، جستجوی پایه، جستجوی تطابقی متعامد، جستجوی زیرفضا و ... پیشنهاد شده است [۱۰]، این الگوریتم‌ها را می‌توان به دو دسته کلی تقسیم کرد: الگوریتم‌های حریمانه و الگوریتم‌های مبتنی بر بهینه‌سازی. در بخش بعد الگوریتم‌های حریمانه ارائه می‌شوند.

الگوریتم‌های حریصانه بصورت گام به گام یک یا چند اتم را که بیشترین همبستگی با باقی مانده مربوط به نمایش سیگنال دارند انتخاب کرده و با استفاده از آن‌ها این باقی مانده را به‌روز می‌کنند. اساس این روش‌ها مبتنی بر تخمین مرحله به مرحله سیگنال با استفاده از اتم‌های دیکشنری است. در واقع استراتژی تکرار اغلب باعث پیشرفت تعداد زیادی از الگوریتم‌های بازسازی تُنک شده است، که از جمله می‌توان الگوریتم‌های جستجوی تطابقی، جستجوی تطابقی متعامد، جستجوی زیرفضا و... نام برد که در ادامه معرفی خواهند شد. اما گروه دوم از الگوریتم‌ها هدفشان حل یک مسئله بهینه‌سازی است. در بخش بعد دسته اول از این الگوریتم‌ها، الگوریتم‌های حریصانه ارائه می‌شوند.

۲-۲ الگوریتم‌های حریصانه

الگوریتم‌های حریصانه^۱ بر این اصل استوار است که در هر مرحله بدون آینده نگری، بهترین انتخاب ممکن صورت گیرد. همان‌طور که پیش‌بینی می‌شود، عدم وجود آینده نگری در این روش‌ها، در بسیاری از موارد منجر به شکست می‌شود اما در مورد بازسازی بردارهای تُنک موفقیت قابل توجهی کسب کرده‌اند. این الگوریتم تکراری، پاسخ تُنک را بوسیله شناسایی پی در پی یک یا بیشتر اتم‌هایی که بیشترین بهبود در کیفیت را دارند، پیدا می‌کند. الگوریتم‌های حریصانه به دو دسته کلی تقسیم می‌شوند: دسته اول در هر گام تنها یک اتم را به عنوان اتمی که بیشترین شباهت را به باقی مانده نمایش سیگنال دارد انتخاب می‌کنند. دسته دوم بیش از یک اتم را انتخاب کرده، سپس طی پیشروی الگوریتم تعدادی از این اتم‌ها را حذف کرده یا اتم‌های جدیدی را به این مجموعه اضافه می‌کنند [۱۱]. در بخش ۲-۲-۱ و ۲-۲-۲ دو الگوریتم پرکاربرد و پایه‌ای این دسته از الگوریتم‌ها معرفی شده‌اند. روش کلی حل الگوریتم‌های حریصانه به این صورت است که، فرض کنید A ماتریسی است که $\text{spark}(A) > 2k$ و فرض کنید مقدار $p_0 = 1$ یعنی در نظر گرفتن x ‌هایی که فقط یک مؤلفه آن مخالف صفر است، بهینه‌ترین پاسخ (تُنک‌ترین پاسخ) است. بنابراین b اسکالری است که از ضرب تنها یک ستون ماتریس A در این پاسخ شناخته شده بدست می‌آید، در نتیجه یکتاست. حال فرض کنید $p_0 = k$ ، $\text{spark}(A) > 2k$ ، آنگاه b ترکیب خطی از k ستون A است.

روش حریصانه با مقدار اولیه $x_0 = 0$ شروع می‌کند، و برای تخمین x_k به این صورت عمل می‌کند، که در هر مرحله یک ستون به ستون‌های قبلی اضافه می‌کند تا اندازه به k برسد، این ستون‌ها را توسط اعمال آزمون برای هر یک از ستون‌های ماتریس شناسایی می‌کند. در مرحله اول خطا به اندازه b است و در هر مرحله خطا را کم می‌کنیم تا به بهترین پاسخ برسیم.

^۱Greedy algorithms

۱-۲-۲ الگوریتم جستجوی تطابقی^۱

این روش ابتدا توسط ژانگ و ملت^۲ [۱۱] مطرح شد. در این روش در هر مرحله تنها ضریب یکی از اتم‌ها مشخص می‌شود. در هر مرحله یک اتم دیکشنری که بیشترین شباهت (بزرگ‌ترین ضرب داخلی) را به داده آزمون دارد، بعنوان عضو فعال در ترکیب خطی در نظر گرفته شده، ضریب مربوط به آن محاسبه می‌شود. در مرحله بعد، باقی‌مانده سیگنال آزمون و اتم نخست با بقیه اتم‌ها مقایسه شده و دوباره مشابه‌ترین اتم انتخاب می‌شود. یعنی تفاضل حاصل ضرب این تقریب^۱ تُنک در دیکشنری از داده آزمون را به عنوان باقی‌مانده در نظر گرفته، مراحل فوق تکرار می‌شوند. در هر مرحله جمع تقریب‌های ۱-تُنک به دست آمده با تقریب‌های قبلی به عنوان تقریب جدید در نظر گرفته می‌شود و این روند تا جایی ادامه می‌یابد که یا تعداد مراحل مشخصی طی شود و یا خطا از مقدار معینی کمتر شود.

فرض کنید $b_{n \times 1} = A_{n \times m} x_{m \times 1}$ و x یک بردار k تُنک است. در این صورت b را می‌توان بصورت ترکیب خطی k تا از ستون‌های A تلقی کرد و عمل بازسازی، معادل با یافتن این k ستون و ضرایب آن‌ها در ترکیب خطی است. در این روش ابتدا ستون‌های مورد استفاده از A در ترکیب خطی آشکار می‌شوند^۳ و سپس به کمک حل یک مسئله حداقل مربعات، ضرایب این ستون‌ها که همان مقادیر ناصفر بردار x هستند محاسبه می‌شوند.

در هر مرحله از روش جستجوی تطابقی (MP) یکی از ستون‌های A به عنوان عضوی فعال در ترکیب خطی آشکار می‌شود، در این مرحله ضرب داخلی b با تمام ستون‌های A محاسبه می‌شود و ستونی که بیشترین اندازه را حاصل کند (که بیشترین شباهت را به b دارد) به عنوان عضو فعال شناسایی می‌شود و مقدار ضرب داخلی که به اندازه این ستون تقسیم شده را به عنوان ضریب آن لحاظ می‌کنیم.

اکنون تقریبی ۱-تُنک از بردار اصلی بدست آورده‌ایم که در این مرحله انتخاب بهینه به شمار می‌رود ($\hat{x}_{m \times 1}^{(1)}$). برای ادامه، با فرض اینکه محاسبات تا این لحظه صحیح است، بردار $r_{n \times 1} = b_{n \times 1} - A_{n \times m} \hat{x}_{m \times 1}^{(1)}$ را به عنوان باقی‌مانده^۴ در نظر می‌گیریم و تمامی مراحل قبلی را طی می‌کنیم تا تخمین ۱-تُنک جدیدی بدست آید. اکنون حاصل جمع این بردار ۱-تُنک جدید و ($\hat{x}_{m \times 1}^{(1)}$) را به عنوان تقریب جدید برای ($\hat{x}_{m \times 1}^{(2)}$) تلقی می‌کنیم و این مراحل را مجدداً تا رسیدن به شرط پایانی (نرم باقی‌مانده کوچک یا تعداد مرحله معلوم و یا ترکیبی از هر دو) ادامه می‌دهیم. الگوریتم MP به دلیل اینکه در هر مرحله نیاز به یک جستجوی ساده دارد، بسیار سریع است، اما به دلیل حریمانه بودن، تضمینی وجود ندارد که پاسخ نهایی مشابه با پاسخ تُنک باشد. بمنظور بهبود این الگوریتم با حفظ سرعت بالا، الگوریتم‌های دیگری پیشنهاد شده است که در ذیل به شرح و توضیح آن پرداخته شده است.

^۱Matching Pursuit

^۲Malat, Zhang

^۳Support recovery

^۴Residual

الگوریتم ۱-۲ الگوریتم جستجوی تطابقی برای تخمین پاسخ مسئله
 $(P_0) : \min_x \|x\|_1 \text{ subject to } Ax = b$

Require: We are given the matrix A , the vector b , and the error threshold ε_0

// Initialize

- 1: $k = 0$,
- 2: The initial solution $x^0 = 0$,
- 3: The initial residual $r^0 = b - Ax^0 = b$
- 4: The initial solution support $S^0 = \text{Support}\{x^0\} = \emptyset$

// Main Iteration

- 5: Increment k by 1 and perform the following steps:
- 6: Compute the errors $\varepsilon(j) = \min_{z_j} \|a_j z_j - r^{k-1}\|_2^2$ for all j using the optimal choice $z_j^* = a_j^T r^{k-1} / \|a_j\|_2^2$
 //Update Support
- 7: Find a minimizer j_0 of $\varepsilon(j) : \forall 1 \leq j \leq m, \varepsilon(j_0) \leq \varepsilon(j)$, and update $S^k = S^{k-1} \cup \{j_0\}$.
 //Update Provisional Solution
- 8: Set $x^k = x^{k-1}$, and update the entry $x^k(j_0) = x^{k-1}(j_0) + z_j^*$
 //Update Residual
- 9: Compute $r^k = b - Ax^k = r^{k-1} - z_{j_0}^* a_{j_0}$
 //Stopping Rule
- 10: If $\|r^k\|_2 < \varepsilon_0$, stop. Otherwise, apply another iteration.
- 11: **return** The proposed solution is x^k obtained after k iterations

۲-۲-۲ الگوریتم جستجوی تطابقی متعامد^۱

در روش جستجوی تطابقی متعامد (OMP) که تعمیم یافته روش قبل است در هر مرحله ضرایب ستون های فعال از ماتریس دیکشنری به صورت مستقل از نتایج مراحل قبل انتخاب می شوند و از نتایج قبلی تنها در یافتن مکان مولفه های غیر صفر استفاده می شود. یعنی در هر مرحله بعد از مشخص شدن اتم جدید، از تمام ضرایب قبلی صرف نظر شده و ترکیبی خطی از تمام اتم های انتخاب شده تا این مرحله، محاسبه می شود که کمترین خطا را برای بازسازی سیگنال آزمون داشته باشد. در واقع در این الگوریتم بر خلاف الگوریتم MP برای بروز کردن نمایش تُنک، سیگنال روی زیرفضای تولید شده توسط اتم های انتخاب شده تا آن مرحله، تصویر می شود. عملکرد این الگوریتم نسبت به MP بهبود زیادی پیدا کرده است [۳].

در بخش بعد الگوریتم دیگری بیان می شود که بهبود زیادی نسبت به OMP پیدا کرده است، و در آزمایشات

^۱Orthogonal Matching Pursuit

الگوریتم ۲-۲ الگوریتم جستجوی تطابقی متعامد برای تخمین پاسخ مسئله
 $(P_0) : \min_x \|x\|_0 \text{ subject to } Ax = b$

Require: We are given the matrix A , the vector b , and the error threshold ε_0

// Initialize

- 1: $k = 0$, and set
- 2: The initial solution $x^0 = 0$,
- 3: The initial residual $r^0 = b - Ax^0 = b$
- 4: The initial solution support $S^0 = \text{Support}\{x^0\} = \emptyset$

//Main Iteration

- 5: Increment k by 1 and perform the following steps:
- 6: Compute the errors $\varepsilon(j) = \min_{z_j} \|a_j z_j - r^{k-1}\|_2^2$ for all j using the optimal choice $z_j^* = a_j^T r^{k-1} / \|a_j\|_2^2$
 //Update Support
- 7: Find a minimizer j_0 of $\varepsilon(j) : \forall j \notin S^{k-1}, \varepsilon(j_0) \leq \varepsilon(j)$, and update $S^k = S^{k-1} \cup \{j_0\}$.
 //Update Provisional Solution
- 8: Compute x^k , the minimizer of $\|Ax - b\|_2^2$ subject to $\text{Support}\{x\} = S^k$
 //Update Residual:
- 9: Compute $r^k = b - Ax^k$
 //Stopping Rule
- 10: If $\|r^k\|_2 < \varepsilon_0$, stop. Otherwise, apply another iteration.
- 11: **return** The proposed solution is x^k obtained after k iterations

داده‌های مصنوعی از عملکرد بهتری برخوردار است.

۳-۲-۲ الگوریتم جستجوی تطابقی متعامد کمترین مربعات خطا^۱

این الگوریتم (جستجوی تطابقی متعامد کمترین مربعات خطا (LS-OMP)) بهبود یافته روش OMP است که در هر بار که یک ستون انتخاب می‌شود، فرض نباشد که همین یک ستون باید خطا را تقریب زند، بلکه این ستون کاندید در کنار ستون‌های قبلی انتخاب شده قرار است تقریب بزند و همه ضرایب ستون‌ها هم یکجا محاسبه شود. هزینه محاسباتی بالاتری دارد.

نتایج آزمایشات در داده‌های مصنوعی در این بخش عملکرد سه الگوریتم MP, OMP, LS-OMP باهم مقایسه شده است. برای این منظور ماتریس A (دیکشنری) با سایز 50×30 با ورودی‌های برگرفته از توزیع

^۱Least- Squares- Orthogonal Matching Pursuit(LS-OMP)

نرمال ایجاد شده است. ستون‌های این ماتریس با داشتن نرم ℓ_2 واحد نرمالیزه می‌شوند. بردارهای پشتیبان دارای مقادیر تنک x با مجموعه مقادیر تصادفی مستقل و با توزیع یکنواخت در بازه $[10; 1]$ درایه‌های غیرصفر، متغیرهای تصادفی هستند که از بازه $[1, 2] \cup [-1, -2]$ بدست می‌آیند.

عمدا مقادیر غیرصفر خیلی دور از صفر انتخاب می‌شوند، زیرا تاثیر زیادی بر موفقیت روش‌های حریمانه دارد. هنگامی که x تولید شد، مشاهدات بصورت $b = Ax$ با استفاده از ترکیب خطی s ستون از این دیکشنری محاسبه می‌شود، و سپس الگوریتم‌های مطرح شده برای یافتن x اعمال می‌شود. s از ۱ تا ۱۰ تغییر می‌یابد ۱۰۰۰ آزمون این چینی بر هر کاردینالیتی اعمال شده، میانگین نتایج گرفته می‌شود. به این نکته توجه داشته باشید که در تمام آزمون‌ها، پاسخ اصلی تنک‌ترین پاسخ است.

روش‌های زیادی برای توصیف فاصله بین پاسخ بدست آمده \hat{x} و ایده‌آل وجود دارد. در اینجا دو روش اندازه‌گیری مطرح می‌شود، خطای ℓ_2 و بازسازی بردار پشتیبان^۱ (دارای مقادیر تنک x). خطای ℓ_2 محاسبه شده بصورت نسبت $\frac{\|x-\hat{x}\|_2}{\|x\|_2}$ نشان می‌دهد، که نزدیکی میان دو راه حل، چیزی است که به دنبال آن هستیم. چنین معیاری تمام داستان این الگوریتم‌ها را آشکار نمی‌کند چرا که در نشان دادن اینکه چه زمانی بردار پشتیبان بصورت کامل یا حداقل بصورت جزئی بازیابی شده است، ناکام می‌ماند. بنابراین یک معیار دیگر برای محاسبه فاصله میان بردارهای پشتیبان دو راه حل اضافه می‌گردد. با تعریف دو بردار پشتیبان بصورت S, \hat{S} این فاصله بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$dist(S, \hat{S}) = \frac{\max\{|\hat{S}|, |S|\} - |\hat{S} \cap S|}{\max\{|\hat{S}|, |S|\}} \quad (7-2)$$

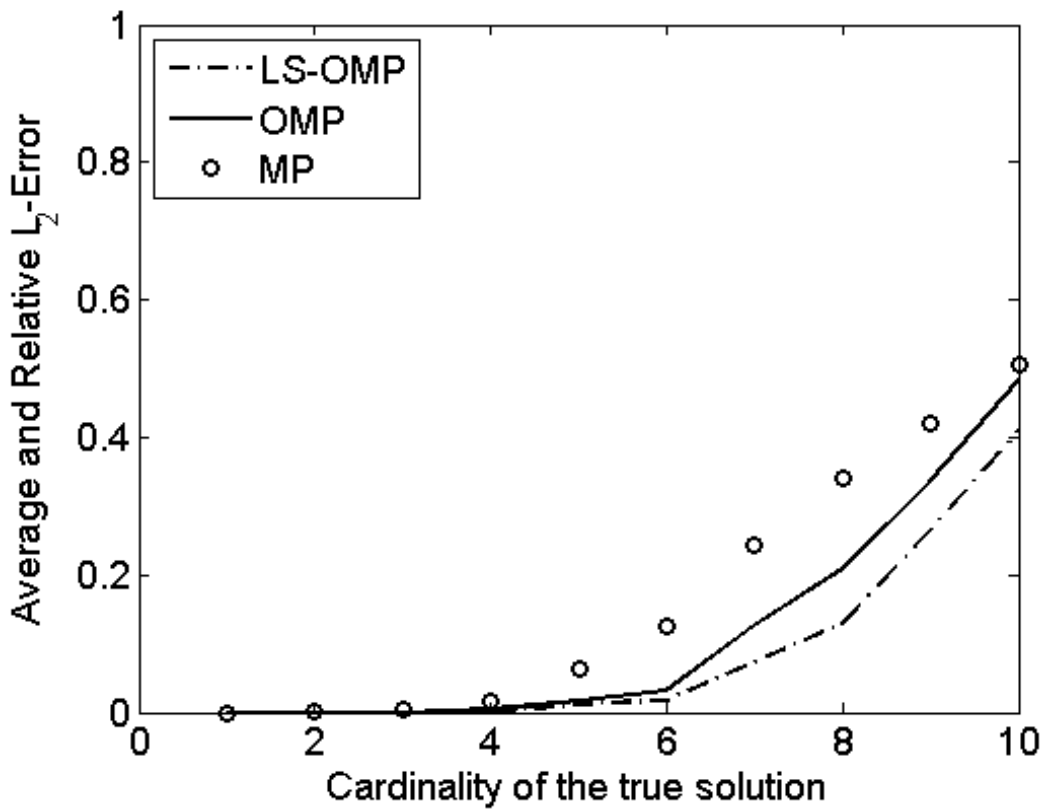
اگر هر دو مجموعه پشتیبان یکسان باشند، فاصله صفر است. اگر دو مجموعه متفاوت باشند، این فاصله تحت اندازه اشتراکشان، در تناسب با طول بردار بزرگتر اعمال می‌شود. فاصله‌ای نزدیک به یک نشان می‌دهد دو بردار کاملاً باهم متفاوت و فاقد هرگونه هم‌پوشی می‌باشند.

همه این الگوریتم‌ها به دنبال پاسخ مناسب هستند تا زمانی که شرط توقف $\|r^k\|_2 \leq 1 \times 10^{-4}$ برقرار شود.

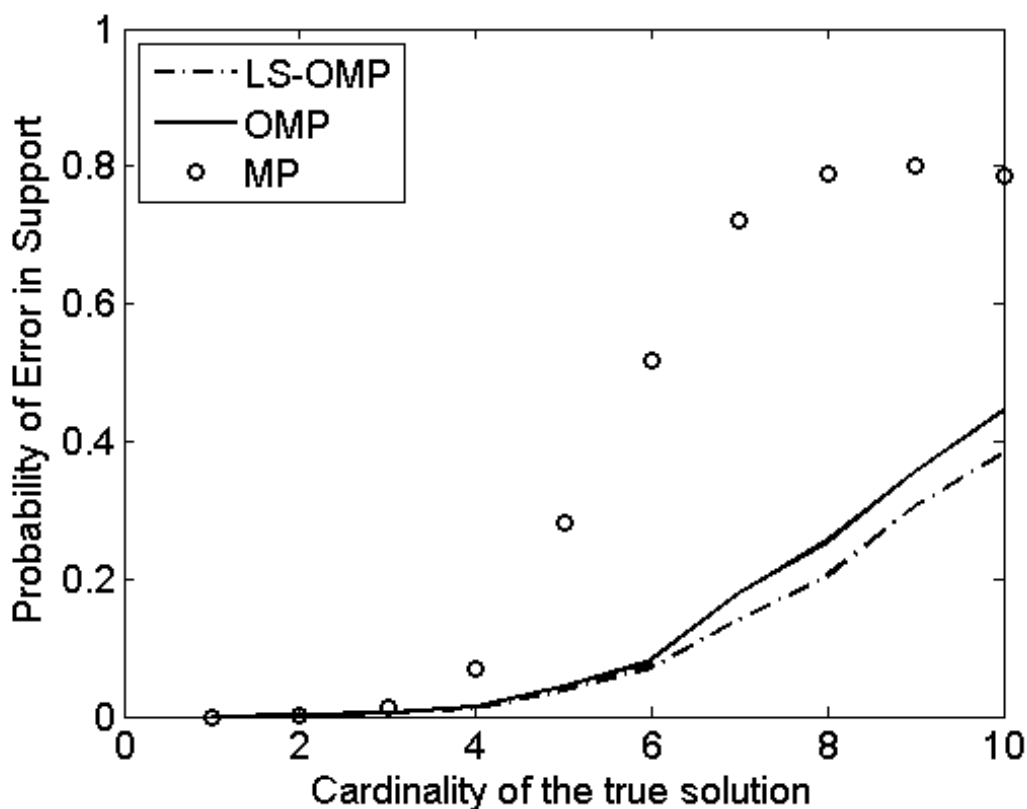
در شکل ۲-۳، ۲-۴ نتایج این آزمایش، با سیستمی دارای پردازنده Intel Core i3 و تحت نرم‌افزار MATLAB نسخه ۲۰۱۳، خلاصه شده است. برنامه مربوط به این آزمایش در پیوست ب-۱ آورده شده است. همانطور که انتظار می‌رفت، بهترین روش LS-OMP و به دنبال آن OMP است.

در بخش بعد دسته دوم از روش‌های حل نمایش تنک بیان می‌شود، که نسبت به دسته اول (الگوریتم‌های حریمانه) از عملکرد بهتری برخوردار است، اما پیچیدگی محاسباتی بالاتری دارد.

^۱Support



شکل ۲-۳: عملکرد الگوریتم‌های حریصانه در جمله‌های مربوط به خطای بازسازی l_2



شکل ۲-۴: عملکرد الگوریتم‌های حریصانه در جمله‌های میزان موفقیت در تشخیص بردار پشتیبان درست

۳-۲ الگوریتم‌های مبتنی بر بهینه‌سازی

دسته دوم از روش‌های حل نمایش تُنک، روش‌های مبتنی بر بهینه‌سازی هستند. برای یادآوری مسئله ۲-۳ را که بصورت زیر تعریف شد مجدداً در نظر بگیرید:

$$(p_*) : \min_x \|x\|, \quad \text{subject to} \quad b = Ax$$

این رابطه غیرمحدب است و از طرفی تابع $\|x\|$ ناهموار و مشتق‌ناپذیر بوده و علاوه بر این، حل این مسئله مستلزم یک جستجوی ترکیبیاتی است که در ابعاد بالا امکان‌پذیر نیست. به عبارت دیگر، برای پیدا کردن جوابی با k درایه‌ی غیرصفر، لازم است در بدترین حالت تعداد $N = \binom{m}{k}$ زیرماتریس از A را، که هرکدام نماینده یک زیرفضاست بررسی کنیم [۱۲]. روش‌های مبتنی بر بهینه‌سازی بر این اصل استوار است که مسئله ۲-۳ را به یک

مسئله محدب و مشتق پذیر بصورت زیر تبدیل کند که بتوان برای حل آن از روش های بهینه سازی استفاده کرد:

$$(p_1) : \min_x \|x\|_1 \quad \text{subject to} \quad b = Ax$$

پاسخ بهینه محلی که از این دسته از مسائل بدست می آید همان پاسخ بهینه سراسری است، و طبق قضیه ۲-۳-۱ هر دو پاسخ مسئله p_0 و p_1 یکتا است.

قضیه ۲-۳-۱. برای سیستم خطی $Ax = b$ ($A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ رتبه کامل با $n < m$) چنانچه جواب x وجود داشته باشد که در شرایط $\|x\|_0 < \frac{1}{\mu(A)} \left(1 + \frac{1}{\mu(A)}\right)$ صدق کند، آنگاه x جواب یکتا p_0 و جواب یکتای p_1 است.

برهان. مجموعه جواب های تکراری C بصورت زیر تعریف می شود:

$$C = \{y \mid y \neq x, \|y\|_1 \leq \|x\|_1, \|y\|_0 > \|x\|_0, \text{ and } A(y - x) = 0\} \quad (8-2)$$

این مجموعه شامل جواب های ممکن به غیر از x است که یک مجموعه بزرگی است که سیستم خطی معادلات $Ax = b$ را برآورد می کند. با یک مجموعه غیر تهی که در بردارنده جواب های تکراری که الگوریتم نرم یک، بجای x پیدا می کند شروع می شود.

با توجه به قضیه ۲-۱-۳ اگر x جواب سیستم $Ax = b$ باشد با این شرط که $\|x\|_0 < \frac{1}{\mu(A)} \left(1 + \frac{1}{\mu(A)}\right)$ آنگاه x تنگ ترین پاسخ است. از این رو جواب های تکراری $x \neq y$ متراکم تر هستند. بنابراین شرط $\|y\|_0 > \|x\|_0$ از مجموعه C حذف می شود، و نیز بردار e بصورت $e = y - x$ تعریف می شود.

بنابراین مجموعه C بصورت زیر بازنویسی می شود:

$$C_s = \{e \mid e \neq 0, \|e + x\|_1 - \|x\|_1 \leq 0, \text{ and } Ae = 0\} \quad (9-2)$$

شیوه اثبات به این صورت است که این مجموعه را توسعه می دهد و نشان می دهد که این مجموعه توسعه یافته تهی است. در این صورت اثبات می شود که روش جستجوی پایه موفق به بازسازی x می شود.

با شرط $\|e + x\|_1 - \|x\|_1 \leq 0$ شروع می کنیم. بدون اینکه کلیت را از دست بدهیم، فرض کنید جایگشت ستونی A طوری است که k عنصر غیر صفر x در ابتدای بردار جای دارند، این شرط بصورت زیر بازنویسی

می‌شود:

$$\|e + x\|_1 - \|x\|_1 = \sum_{j=1}^{k_*} |e_j + x_j| - |x_j| + \sum_{j>k_*} |e_j| \leq 0 \quad (10-2)$$

با توجه به رابطه $|a + b| - |b| \geq -|a|$ شرط ۱۰-۲ بصورت زیر ساده می‌شود:

$$-\sum_{j=1}^{k_*} |e_j| + \sum_{j>k_*} |e_j| \leq \sum_{j=1}^{k_*} |e_j + x_j| - |x_j| + \sum_{j>k_*} |e_j| \leq 0 \quad (11-2)$$

این نابرابری بصورت فشرده‌تر با اضافه و کم کردن جمله $\sum_{j=1}^{k_*} |e_j|$ و نمایش آن بصورت $\mathbf{1}_{k_*}^T \cdot |e|$ نشان دهنده مجموع k_* درایه اول بردار e است.

$$\|e\|_1 - \mathbf{2}(\mathbf{1}_{k_*}^T \cdot |e|) \leq 0 \quad (12-2)$$

بنابراین تعریف C_s بصورت زیر جایگزین می‌شود:

$$C_s \subseteq \{e | e \neq 0, \|e\|_1 - \mathbf{2}(\mathbf{1}_{k_*}^T \cdot |e|) \leq 0, \text{ and } Ae = 0\} = C'_s \quad (13-2)$$

همانطور که تا اینجا اشاره شد تغییرات از شرط $\|e + x\|_1 - \|x\|_1 \leq 0$ به شرط $\|e\|_1 - \mathbf{2}(\mathbf{1}_{k_*}^T \cdot |e|) \leq 0$ بطور مؤثری مجموعه را بزرگ می‌کند، زیرا هر بردار e که در شرایط اولیه صدق می‌کند باید در شرط جدید نیز صدق کند، اما بالعکس این شرط درست نمی‌باشد.

اکنون برای توسعه بیشتر مجموعه C'_s شرط $Ae = 0$ را با شرط ساده شده ای که این مجموعه را توسعه می‌دهد جایگزین می‌کنیم. ابتدا A^T را در طرفین شرط $Ae = 0$ ضرب می‌کنیم، هر درایه در ماتریس $A^T A$ یک ضرب داخلی نرمال شده است برای تعریف همبستگی متقابل $\mu(A)$. همچنین قطر اصلی این ماتریس شامل درایه‌های ۱ است. بنابراین این شرط را می‌توان با اضافه و کم کردن e بصورت زیر بازنویسی کرد:

$$-e = (A^T A - I)e \quad (14-2)$$

با گرفتن قدرمطلق روی طرفین تساوی رابطه ۲-۱۴ شرایط روی e ساده می‌شود و عبارت زیر بدست می‌آید:

$$|e| = |(A^T A - I)e| \leq |A^T A - I| \cdot |e| \leq \mu(A)(1 - I) \cdot |e| \quad (15-2)$$

در این قسمت از رابطه $|\sum_i g_i v_i| \leq \sum_i |g_i| |v_i|$ استفاده شده است. این رابطه به عنوان اثر ضرب یک سطر از ماتریس G در بردار e تفسیر می‌شود و یادآور می‌شود که عنصر j ام در چنین ضربی $|Gv|_j \leq (|G| |v|)_j$ را ایجاب می‌کند.

جمله ۱ یک ماتریس با رنک یک است که درایه‌های آن تماماً با یک پر شده است. در آخرین مرحله از اثبات از تعریف همبستگی متقابل^۱ استفاده می‌شود و این واقعیت که کران بالا، ضرب داخلی نرمال شده ستون‌های A است.

باز می‌گردیم به مجموعه C_s^1 این مجموعه بصورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$C_s^1 \subseteq \left\{ \begin{array}{l} |e| \neq 0, \|e\|_1 - 2(\mathbf{1}_{k^T}^T \cdot |e|) \leq 0 \\ \text{and } |e| \leq \frac{\mu(A)}{1+\mu(A)} \mathbf{1} \cdot |e| \end{array} \right\} = C_s^2 \quad (16-2)$$

مجموعه C_s^2 بدون مرز است و اگر $e \in C_s^2$ باشد، آنگاه $\alpha e \in C_s^2$ برای همه $\alpha \neq 0$ بنابراین به منظور مطالعه این رفتار می‌توان جستجو را برای بردارهای نرمال $\|e\|_1 = 1$ محدود کرد. این مجموعه جدید C_r نامیده می‌شود و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_r \subseteq \left\{ |e| \|e\|_1 = 1 - 2(\mathbf{1}_{k^T}^T \cdot |e|) \leq 0 \quad \text{and} \quad |e| \leq \frac{\mu(A)}{1+\mu(A)} \mathbf{1} \cdot |e| \right\} \quad (17-2)$$

در شرط آخر از رابطه $\mathbf{1} \cdot |e| = \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T |e| = \|e\|_1 = 1$ استفاده می‌شود و این واقعیت که $\mathbf{1}^T |e| = \|e\|_1 = 1$ برای اینکه بردار e بتواند شرط

$$1 - 2(\mathbf{1}_{k^T}^T \cdot |e|) \leq 0$$

را ایجاب کند باید روی k درایه اولش تمرکز کند. بهر حال شرط $\|e\|_1 = 1$ و $|e_j| \leq \mu(A)/(1 + \mu(A))$ این درایه‌های k را محدود می‌کند تا $|e_j| = \mu(A)/(1 + \mu(A))$ استخراج شود. زیرا حداکثر مقادیر مجاز

^۱Mutual-coherence

هستند. بنابراین با بازگشت به شرط اول رابطه زیر برقرار است

$$1 - 2(\mathbf{1}_{k_0}^T \cdot |e|) = 1 - 2k_0 \frac{\mu(A)}{1 + \mu(A)} \leq 0$$

به این معنا که اگر k_0 کمتر از $(1 + \frac{1}{\mu(A)})/2$ باشد، مجموعه تهی می‌شود، از این روروش جستجوی پایه منجر به جواب مطلوب می‌شود. □

در ادامه، روش‌های پرکاربرد در این زمینه مطرح می‌شود.

۱-۳-۲ الگوریتم جستجوی پایه^۱

روش جستجوی پایه (BP) یکی از روش‌های رهاسازی است، که برای حل رابطه ۲-۳ از تبدیل نرم صفر به نزدیک‌ترین نرم محدب به آن استفاده می‌کند. روش جستجوی پایه که به اختصار BP خوانده می‌شود با جایگذاری نرم ℓ_1 به جای نرم ℓ_0 ، مسئله جدید را با الگوریتم BP حل می‌کند. مسئله برنامه‌ریزی خطی را می‌توان اساساً یک روش جستجوی پایه دانست که سعی می‌کند یک پایه بهینه را از میان $\binom{m}{n}$ پایه ممکن (تمام ترکیب‌های n تایی ستون‌های A) انتخاب کند. برنامه‌ریزی خطی، پایه‌ای را انتخاب می‌کند که x برحسب آن تنگ‌ترین نمایش را داشته باشد [۱۲].

ایده اصلی در این الگوریتم کمینه کردن نرم ℓ_1 است. اگر پاسخ سیستم خطی فرومعین به اندازه کافی تنگ باشد، جواب بهینه محلی مسئله زیر همان جواب بهینه سراسری است.

$$(p_1) : \min_x \|x\|_1 \quad \text{subject to} \quad Ax = b \quad (18-2)$$

حال با یک مسئله خطی محدب مواجه هستیم که باروش‌های برنامه‌ریزی خطی قابل حل است. علاوه بر این مزیت دیگر مسئله p_1 به p_0 این است که، نسبت به نویز حساسیت کمتری دارد. به این دلیل که نرم صفر یک بردار با مقدار بسیار کمی نویز به شدت تغییر می‌کند، زیرا تعداد عناصر صفر و غیر صفر آن با اندکی نویز به عناصر صفر و غیر صفر دیگری تبدیل می‌شوند. در صورتی که برای نرم یک چنین نیست. یکی از عیب‌های این الگوریتم پیچیدگی محاسباتی بالایی است که در مقایسه با جستجوی تطابقی دارد. بنابراین زمان اجرای الگوریتم

^۱Basis Pursuit

نیز به مراتب بیشتر است.

۲-۳-۲ خانواده الگوریتم‌های حداقل مربعات وزن دهی شده تکراری IRLS^۱

مسئله آشنای زیر را یکبار دیگر در نظر بگیرید:

$$(p_p) : \min_x \|x\|_p^p \quad \text{subject to} \quad b = Ax \quad (۱۹-۲)$$

رهیافت این خانواده از الگوریتم‌ها برای حل مسئله ۲-۱۹، جایگزین کردن تابع هدف (شبه) نرم ℓ_p با نرم ℓ_2 وزن دهی شده و انجام تکرارهایی بصورت زیر است:

$$x^{(k+1)} = \arg \min_x \sum_i w_i^{(k)} x_i^2 = x^T W_k x \quad \text{subject to} \quad b = Ax \quad (۲۰-۲)$$

که در آن W_k یک ماتریس قطری بوده که عناصر روی قطر اصلی با استفاده از جواب تکرار قبلی و به صورت $w_i^{(k)} = |x_i^{(k)} + \sigma|^{p-2}$ محاسبه می‌شود. σ به منظور اجتناب از بروز تقسیم بر صفر به این جمله اضافه شده است. به این ترتیب، مسئله غیرمحدب ۲-۱۹ البته به استثنای حالت $p = 1$ منجر به حل تعدادی مسئله محدب می‌شود. برای بدست آوردن جواب تکرار بعدی، یعنی $x^{(k+1)}$ کافی است مسئله ۲-۲۰ را با استفاده از ضرایب لاگرانژ حل کنیم. در نهایت جواب به فرم زیر بدست می‌آید:

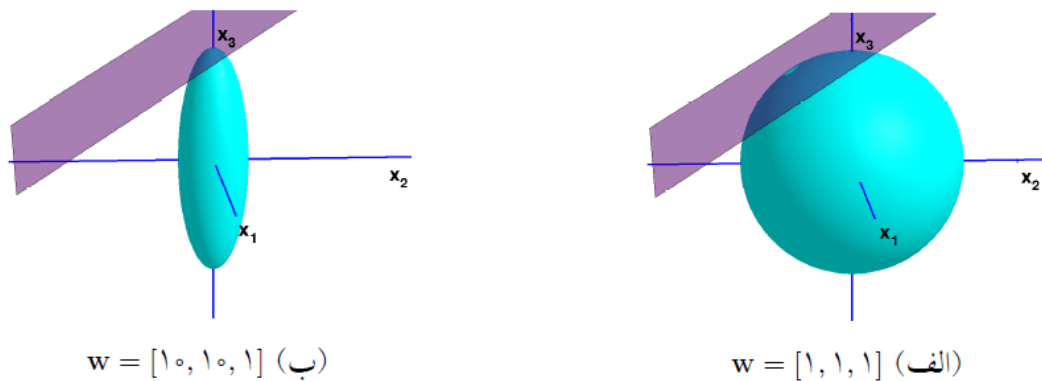
$$x^{(k+1)} = \bar{W}_k A^T (\bar{W}_k A^T)^{-1} b \quad (۲۱-۲)$$

با پیشروی الگوریتم و در صورت همگرایی، تابع هدف مسئله ۲-۲۰ به تابع نرم ℓ_p میل می‌کند. رفتار $\{w_i\}$ ها یک تعبیر هندسی جالب دارد. در تکرار نخست، این وزن‌ها همگی برابر با یک انتخاب می‌شوند. با این انتخاب، شکل سطوح ثابت تابع هدف، یعنی سطوح ثابت " $x^T W x$ " کروی شکل بوده و در واقع جواب تکرار بعدی که از مسئله ۲-۲۰ بدست می‌آید چیزی نیست جز جواب با حداقل نرم ℓ_2 دستگاه معادلات $Ax = b$.

در تکرارهای بعدی، وزن‌های $\{w_i\}$ برحسب عناصر بردار جواب مرحله قبل تغییر می‌کنند و شکل سطوح ثابت تابع هدف به صورت بیضی‌هایی به مرکز مبدا و با قطرهای موازی محورهای مختصات تبدیل می‌شود. در واقع هرچه تعداد تکرار بالا می‌رود، کشیدگی این بیضی‌ها در جهت عناصر قدرمطلق بزرگ بردار جواب قبلی

^۱ Iteratively Re-weighted Least Squares

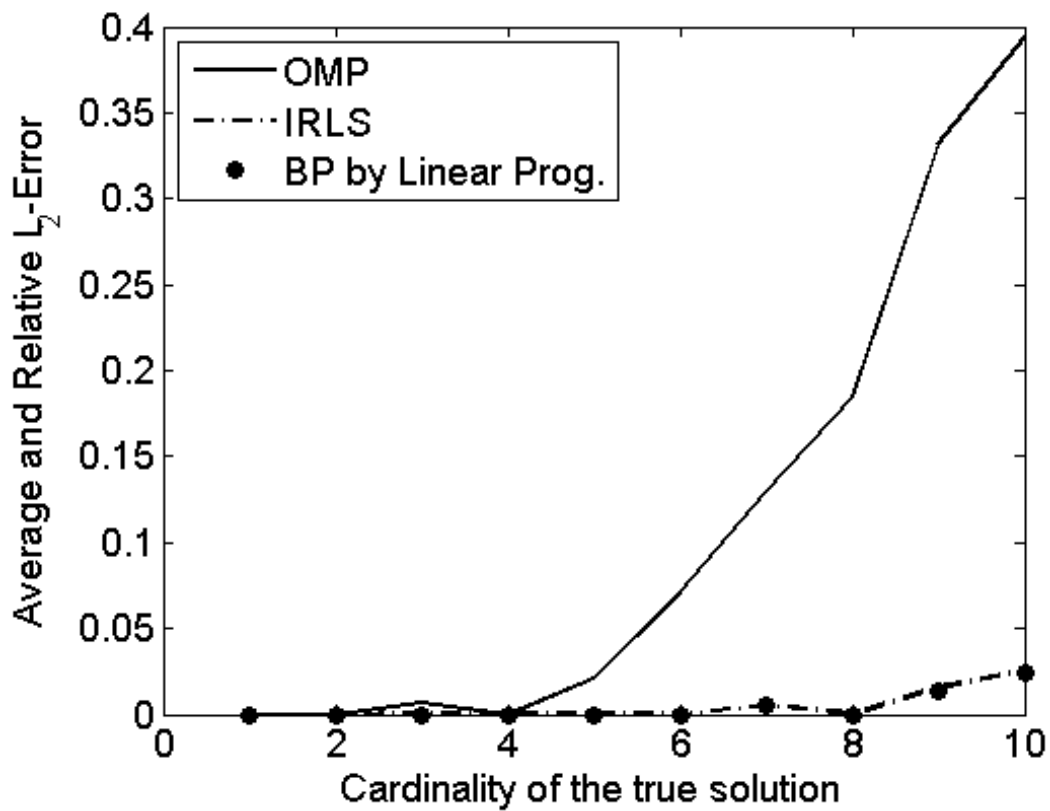
بیشتر می شود و به این ترتیب به سمت جواب های تُنک پیش می رود. شکل ۲-۵ دو مورد از این سطوح را نشان می دهد. در این شکل بردار w نشان دهنده عناصر روی قطر اصلی ماتریس W است.



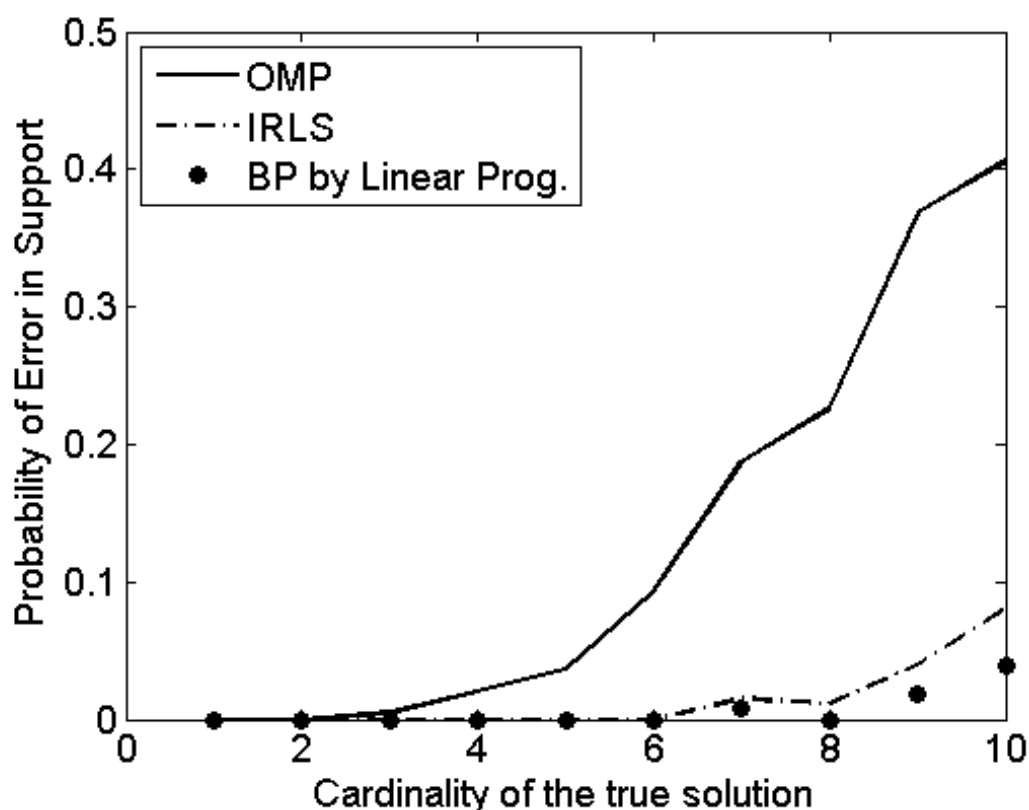
شکل ۲-۵: سطوح ثابت $x^T W x$

مشکل این الگوریتم ها نیاز به محاسبه معکوس ماتریس در رابطه ۲-۲۱ است، طوری که در مسائل با ابعاد خیلی بالا عملاً فاقد کاربرد می شوند [۸].

نتایج آزمایشات در داده های مصنوعی در این بخش با توجه به آزمون های ارائه شده در ۲-۲-۳ مقایسه الگوریتم های BP، IRLS و OMP را در نمودار ۲-۶ و ۲-۷ ارائه شده است. اولین الگوریتم، IRLS که در ۲-۲ توضیح داده شد، برای $p = 1$ و دومین روش مورد آزمون، حل کننده مسئله خطی توسط نرم افزار متلب، برای محاسبه جواب جستجوی پایه است. الگوریتم های IRLS، BP، زمان زیادی برای اجرا در مقایسه با OMP صرف می کنند. در نتیجه تنها ۲۰۰ آزمون در هر کاردینالیته اعمال می شود.



شکل ۲-۶: عملکرد الگوریتم‌های مبتنی بر بهینه‌سازی در جمله‌های خطای بازسازی ℓ_2



شکل ۲-۷: عملکرد الگوریتم‌های مبتنی بر بهینه‌سازی در جمله‌های میزان موفقیت در تشخیص بردار پشتیبان درست

تا اینجا الگوریتم‌های پرکاربرد برای حل نمایش تنگ بیان شد، در بخش بعد برخی دیگر از الگوریتم‌هایی که برای حل این نمایش استفاده می‌شود ارائه می‌شود.

۲-۴ برخی از دیگر الگوریتم‌های حل نمایش تنگ

۲-۴-۱ الگوریتم نمونه‌برداری فشرده جستجوی تطابقی^۱

همانطور که در بخش‌های قبلی اشاره شد در الگوریتم‌های تکراری MP و OMP در هر مرحله تنها یک اتم که بیشترین شباهت را به باقی‌مانده نمایش سیگنال دارد انتخاب می‌شود، اما در الگوریتم نمونه‌برداری فشرده جستجوی تطابقی یا به اختصار CoSa-MP، در هر مرحله چندین اتم به عنوان کاندید حضور در نمایش سیگنال انتخاب می‌شوند. روش‌های حریم‌بانه در برخی موارد نتایج ضعیفی در حضور نویز از خود نشان می‌دهند. اتمی

^۱Compressive Sampling Matching Pursuit.

که در هر گام انتخاب می‌شود، بطور قطع تا پایان الگوریتم در نمایش تُنک سیگنال حضور دارد. بنابراین در صورت اشتباه در انتخاب اتم، اثر آن تا پایان الگوریتم منجر به پاسخ‌های نادرست می‌شود. احتمال بروز این اشتباه به خصوص زمانی که همبستگی بین اتم‌های دیکشنری زیاد است بالا می‌رود. این امر به دلیل حرص زیاد این الگوریتم‌ها است. یک راه حل برای غلبه بر این مشکل انتخاب چندین اتم در گام انتخاب بهترین اتم‌ها، بعنوان کاندید حضور در نمایش تُنک سیگنال، و سپس استفاده از تعدادی از این اتم‌ها برای بروز کردن نمایش سیگنال، روش CoSa-MP اینکار را انجام می‌دهد. در این روش هر بار به جای انتخاب یک ستون از ماتریس A تعداد بیشتری انتخاب می‌شوند که پایداری نسبتاً خوبی را فراهم می‌کند [۱۳].

۲-۴-۲ الگوریتم جستجوی زیرفضا^۱

الگوریتم جستجوی زیرفضا یا به اختصار (SP) در میان تمام زیرفضاهای p -بعدی مختصات، با یک جستجوی ترکیباتی یا کامل، نزدیک‌ترین زیرفضا را به مجموعه جواب $Ax = b$ می‌یابد. سپس تصویر این مجموعه جواب روی زیرفضای مذکور را به عنوان تخمینی از جواب تُنک مسئله بدست می‌دهد. مسئله یافتن فاصله $Ax = b$ از یک زیرفضای p -بعدی مختصات به شکل یک مسئله بهینه‌سازی مطرح و جواب صریحی برای آن ارائه داده شده است.

برای مفهوم زیرفضا، فرض کنید سیگنال مورد بررسی ما یعنی b تنها از K اتم استفاده می‌کند که $K \ll m$. بنابراین برای ساختن این سیگنال به تعداد $\binom{m}{K}$ دسته K تایی از اتم‌ها حق انتخاب داریم. هر انتخاب در واقع نشان‌دهنده یک زیرفضا است. این روش در بازسازی، قابل مقایسه با روش‌های برنامه ریزی خطی است و همچنین پیچیدگی بازسازی کمتری نسبت به روش‌های MP برای هر سیگنال تُنک دارد. این الگوریتم هم برای زمانی که نویز داریم و هم زمانی که نویز نداریم به ترتیب بطور دقیق و تقریبی عمل بازسازی را انجام می‌دهد. برای هر ماتریس نمونه‌برداری A و پارامتر ثابت مستقل K ، الگوریتم SP^۲ سیگنال K تنک دلخواه را به درستی از روی سیگنال‌های بدون نویز آن بازسازی می‌کند. هنگامی که اندازه‌گیری‌ها دقیق نیستند یا سیگنال کاملاً تُنک نیست، خطای بوجود آمده با یک ثابت چندگانه‌ای از اندازه‌گیری‌های اختلال سیگنال انرژی کران دار می‌شود.

تفاوت اصلی بین الگوریتم SP و CoSaMP [۱۴] در چگونگی اضافه کردن کاندیدهای جدید به لیست است. در هر تکرار، در الگوریتم SP، تنها K کاندید جدید اضافه می‌شود، در حالیکه الگوریتم CoSaMP $2K$ بردار اضافه می‌کند. این باعث می‌شود از نظر محاسباتی الگوریتم کارآمدتر باشد، اما از لحاظ تحلیل آماری پیچیده‌تر است. علاوه بر این ثابت همسان محدود برای الگوریتم SP به همگرایی بزرگتری منجر می‌شود که در [۱۴] ارائه

^۱ Subspace pursuit

^۲ Subspace pursuit

شده است. لازم به توضیح است که دو الگوریتم CoSaMP و SP در یک سال و مستقل از یکدیگر منتشر شده است.

۲-۴-۳ الگوریتم منظم‌سازی نرم یک^۱

در سال‌های اخیر توجه زیادی به روش‌های منظم‌سازی نرم یک (LSPs) برای بازسازی سیگنال تُنک شده است. مسائل LSPs بعنوان مسائل درجه دوم محدب^۲ مطرح می‌شوند که برای مسئله با سایز کوچک و متوسط با روش‌های استاندارد همچون روش‌های نقطه داخلی حل می‌شوند. در [۱۵] روشی مبتنی بر نقطه درونی برای حل اندازه بزرگی از روش LSPs مطرح شده است که از الگوریتم پیش شرط ساز گرادیان مزدوج^۳ استفاده می‌کند.

روش‌های نقطه داخلی قادر به حل مسائل تُنک بزرگ با یک میلیون متغیر با دقت بالا در زمانی کمتر از ۱۰ دقیقه روی رایانه هستند. این روش‌ها خیلی سریع در زمینه پزشکی بر روی تصاویر MRI گسترش یافتند. در واقع مجموع مقادیر قدرمطلق، بجای مجموع مربعات استفاده شده در منظم‌سازی تیخونوف جایگزین می‌شود. رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\min_x \|Ax - b\|_2 + \lambda \|x\|_1 \quad (2-22)$$

که $\lambda > 0$ پارامتر منظم‌سازی است. مسئله ۲-۲۲ را منظم‌سازی نرم یک^۴ می‌نامند. همیشه روش حلی برای حل این مسئله وجود دارد اما لزوماً یکتا نیست. همگرایی این مسئله برای مقدار محدود λ بصورت زیر رخ می‌دهد:

$$\lambda \geq \lambda_{\max} = \|2A^T b\|_{\infty} \quad (2-23)$$

۲-۴-۴ الگوریتم لاسو^۵

حداقل انقباض مطلق و انتخاب عملگر (LASSO)^۶ که به اختصار از آن با نام لاسو یاد می‌کنیم، یک روش منظم‌سازی مشابه رگرسیون ریج است، با این تفاوت که جریمه ℓ_1 در رگرسیون ریج یعنی $\sum_j^n x_j^2$ با مقدار جریمه

^۱ ℓ_1 -Regularized least-squares (LSPs) ^۲ Convex quadratic programs (QPs) ^۳ Preconditioned conjugate gradients (PCG) ^۴ ℓ_1 -Regularization ^۵ LASSO ^۶ Least Absolute Shrinkage and Selection Operator (LASSO)

ℓ_1 یعنی $\sum_j^n |x_j|$ جایگزین شده است. روش لاسو مسئله بهینه‌سازی منظم زیر را حل می‌کند [۱۶]:

$$\arg \min_x h(x) = \frac{1}{\gamma} \|b - Ax\|_{\gamma}^{\gamma} + \lambda \|x\|_1, \quad \lambda \geq 0. \quad (24-2)$$

رگرسیون ریج و لاسو را نیز می‌توان به فرم مسئله بهینه‌سازی مقید زیر نیز تعریف نمود [۱۷]:

$$x_{\text{ridge}} = \arg \min_x \|b - Ax\|_{\gamma}^{\gamma} \quad s.t. \quad \|x\|_{\gamma}^{\gamma} \leq t \quad (25-2)$$

$$x_{\text{lasso}} = \arg \min_x \|b - Ax\|_{\gamma}^{\gamma} \quad s.t. \quad \|x\|_1 \leq t \quad (26-2)$$

t پارامتر میزان‌ساز^۱ (مشابه λ) است. برای هر λ و جواب متناظر با آن در شیوه نمایش قبل (فرم جریمه گذاری شده)، یک مقدار t وجود دارد به طوری که فرم مقید فوق نیز همان جواب را داشته باشد.

در شکل ۲-۸ تصویر سمت راست رگرسیون ریج و تصویر سمت چپ لاسو را نمایش می‌دهند [۱۷]. منحنی‌ها بیان‌گر خطا و ناحیه‌های خاکستری رنگ نمایان‌گر نواحی $|x_1| + |x_2| \leq t$ و $x_1^2 + x_2^2 \leq t$ که به ترتیب متناظر با قیود لاسو و رگرسیون ریج هستند، می‌باشد. همان‌طور که از شکل ۲-۸ نتیجه می‌شود، این جریمه باعث تُنک شدن^۲ مؤلفه‌های بردار جواب x و به طور خودکار منجر به انتخاب بعضی ویژگی‌ها می‌شود. به علاوه، جمله‌ی جریمه بردار جواب x را منظم می‌کند و بنابراین از بیش برآزش جلوگیری می‌کند.

قضیه ۲-۴-۱ (تابع هدف لاسو محدب است). تابع هدف لاسو، $h(x)$ ، در معادله‌ی ۲-۴-۴ محدب است.

برهان. یادآوری می‌شود، تابع هدف لاسو به صورت زیر تعریف می‌شود:

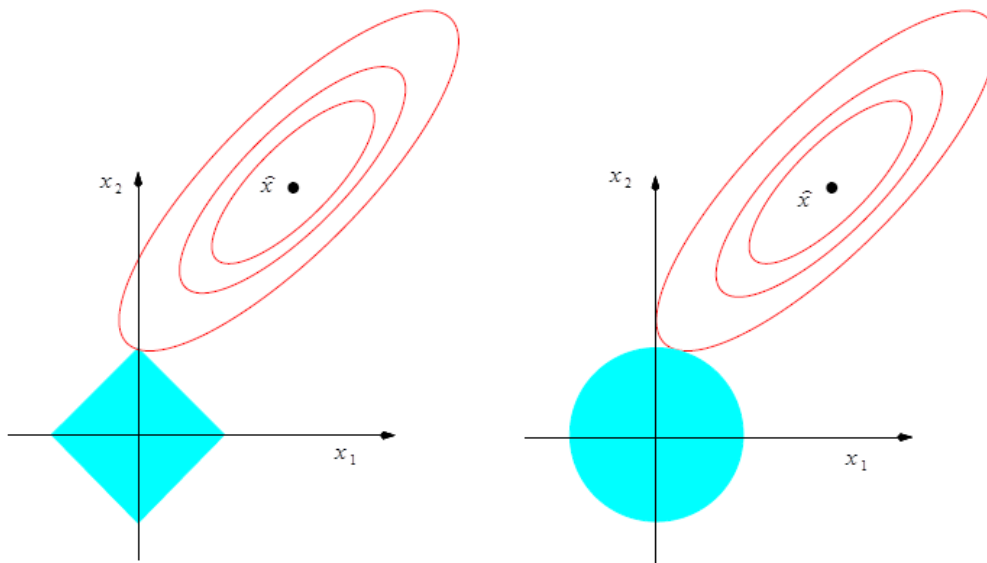
$$x_{\text{lasso}} = \arg \min_x \|b - Ax\|_{\gamma}^{\gamma} \quad s.t. \quad \|x\|_1 \leq t$$

تابع هدف لاسو را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$h(x) = f(x) + g(x) \quad (27-2)$$

^۱Tuning parameter

^۲Sparsity



شکل ۲-۸: نمایش رگرسیون ریج و لاسو

که $f(x) = \frac{1}{\gamma} \|b - Ax\|_{\gamma}^{\gamma}$ و $g(x) = \lambda \|x\|_1$ می باشد، $f(x)$ را نیز می توان به صورت زیر نمایش داد:

$$f(x) = \frac{1}{\gamma} (b - Ax)^T (b - Ax)$$

بنابراین مشتق مرتبه اول $f(x)$ به صورت $\nabla f(x) = A^T b + A^T Ax$ می باشد و هسیان تابع $f(x)$ ، به صورت $\nabla^2 f(x) = A^T A$ است. لذا برای هر بردار z $n \times 1$ مانند z ، خواهیم داشت:

$$z^T A^T A z = (Az)^T Az = \|Az\|_{\gamma}^{\gamma} \geq 0$$

بنابراین $\nabla^2 f(x)$ نیمه معین مثبت است. پس بنا به قضیه ۱-۳-۳، $f(x)$ محدب است. برای هر x_1 و x_2 و هر $\alpha \in (0, 1)$ ، در نظر می گیریم، روابط زیر را خواهیم

داشت:

$$\begin{aligned}g(x) &= \lambda \|\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2\|_1 \\ &\leq \lambda \|\alpha x_1\|_1 + \lambda \|(1 - \alpha)x_2\|_1 \\ &= \lambda \alpha \|x_1\|_1 + \lambda(1 - \alpha) \|x_2\|_1 \\ &= \alpha g(x_1) + (1 - \alpha)g(x_2)\end{aligned}$$

بنابراین $g(x)$ محدب است. چون $f(x), g(x)$ هر دو محدب هستند. پس بنا به قضیه ۱-۳-۲ $h(x) = f(x) + g(x)$ نیز محدب است. □

قضیه ۲-۴-۲. اگر $f(x)$ یک تابع محدب بر مجموعه محدب D باشد آنگاه هر مینیمم محلی f بر D ، یک مینیمم سراسری f بر D است. □

برهان. مرجع [۱۸].

برای حل مسئله لاسو از الگوریتم ارائه شده در ۲-۴-۴ که به الگوریتم شوتینگ^۱ معروف است، استفاده می‌شود [۱۸].

۲-۴-۵ الگوریتم هموارسازی نرم صفر

از جمله روش‌های رهاسازی (مبتنی بر بهینه‌سازی) می‌توان به روش هموارسازی نرم صفر (Sl_0)^۲ اشاره کرد. مشکلی که برای حل رابطه ۲-۳ وجود دارد اینست که نرم صفر پیوسته نیست و بنابراین محاسباتی برای حل آن وجود ندارد. در [۱۹] برای حل رابطه فوق و یافتن پاسخ تُنک از نرم صفر هموار شده که Sl_0 نامیده می‌شود، استفاده می‌کند. در این الگوریتم تلاش می‌شود تا بطور مستقیم $\|x\|$ کمینه شود.

این الگوریتم برای اولین بار در سال ۲۰۰۶ معرفی شد [۱۹]. در مقایسه با الگوریتم‌های قدرتمندی که در این زمینه مطرح می‌شود، الگوریتم MP الگوریتم سریعتری است اما یافتن تُنک‌ترین پاسخ را تضمین نمی‌کند. در این میان الگوریتم BP با اینکه پیچیدگی محاسباتی بالاتری نسبت به MP دارد، رسیدن به تُنک‌ترین پاسخ را تضمین می‌کند اما بر پایه تبدیل نرم صفر به نرم یک است.

^۱Shooting algorithm ^۲Smooth l_0 .

$S\ell_0$. A^\dagger stands for the Moore-Penrose pseudo inverse of A (i.e. الگوریتم ۲-۳ مبانی الگوریتم).
 $A^\dagger \triangleq A^T(AA^T)^{-1}$.

Require: We are given the matrix A , the vector b , and the error threshold ε_0

// Initialize Set $\hat{x}_0 = A^\dagger b$ Choose a suitable decreasing sequence

- 1: **for** $\sigma = [\sigma_1 \dots \sigma_J]$ **do**
- 2: Let $\sigma = \sigma_i$
- 3: Maximize $f_\sigma(x)$ subject to $Ax = b$ using L iterations of steepest ascent:
- 4: //Initialization: $x = \hat{x}_{j-1}$.
- 5: **for** $i = 0$ to 10 **do**
- 6: Let $x \leftarrow x + (\mu\sigma^2)\nabla F_\sigma(x)$.
- 7: Project x back onto the feasible set $\{x | Ax = b\}$: $x \leftarrow x - A^\dagger(Ax - b)$.
- 8: **end for**
- 9: Set $\hat{x}_j = x$
- 10: **end for**
- 11: **return** $\hat{x} = \hat{x}_j$

ایده اصلی الگوریتم $S\ell_0$ تخمین نرَم صفر توسط یک تابع نرم است. نرَم صفر توسط یک تابع پیوسته $f_\sigma(x)$ تخمین زده می‌شود. که پارامتر σ کیفیت تخمین را تعیین می‌کند. هر چه σ بزرگتر باشد، تابع $f_\sigma(\cdot)$ نرم‌تر است، اما تخمین بدتری بدست می‌آید، و برعکس. از این رو هنگامی که $\sigma \rightarrow 0$ میل می‌کند، پاسخ تُنک‌تری بدست می‌آید. بنابراین هدف اساسی $S\ell_0$ بیشینه کردن تابع $f_\sigma(x)$ تحت شرایط $Ax = b$ برای تمام مقادیر کوچک σ است. در این حالت تابع $f_\sigma(\cdot)$ ماکزیمم‌های محلی زیادی دارد، از این رو امکان توقف در این ماکزیمم‌ها کار ساده‌ای نیست. بنابراین، $S\ell_0$ با استفاده از ایده "عدم تحذب تدریجی" یا GNC^۱ با یک σ بزرگ شروع کرده و به تدریج به سمت صفر کاهش می‌یابد. شروع هر مسئله با استفاده از جواب نهایی مسئله قبلی با استفاده از روش تندترین کاهش^۲ است، که در پیوست آ-۳-۱ توضیح داده شده است. در این وضعیت اگر چه احتمال توقف الگوریتم در یک ماکزیمم محلی نامطلوب کاسته می‌شود؛ ولی مسئله کلی همچنان غیرمحدب بوده و لذا تضمینی به همگرایی به یک جواب سراسری وجود ندارد. در قسمت ۲-۳ الگوریتم این روش ارائه شده است.

در این فصل مباحث تئوری نمایش تُنک و تعدادی از الگوریتم‌های موجود برای بازسازی این نمایش را به اختصار مرور شد. چالش اصلی در این مباحث، حل دستگاه معادلات خطی فرومعیین است.

در حالت کلی الگوریتم‌های موجود برای حل این دستگاه معادلات خطی فرومعیین را به دو دسته الگوریتم‌های حریصانه و الگوریتم‌های مبتنی بر حل یک مسئله بهینه‌سازی تقسیم بندی شد که به اختصار تعدادی از این الگوریتم‌ها را مرور کردیم. ارائه شد. در حالت کلی سرعت الگوریتم‌های حریص نسبت به الگوریتم‌های مبتنی بر حل یک مسئله بهینه‌سازی بیشتر است اما از دقت کمتری برخوردارند. در فصل بعد دو کاربرد بعنوان نمونه از

^۱Graduated non-convexity ^۲Steepest descent

بین کاربردهای فراوان نمایش تنگ ارائه خواهد شد.

فصل ۳

کاربردهایی از نمایش تنگ

در فصل قبل انواع روش‌های حل پردازش تنگ سیگنال‌ها بیان شد. در فصل حاضر بعنوان یکی از کاربردهای پردازش تنگ سیگنال‌ها در حوزه تصاویر، بحث طبقه‌بندی تصاویر بررسی می‌شود. برای این منظور، کاربرد نمایش تنگ در مسئله فراتفکیک‌پذیری، طبقه‌بندی تصاویر پزشکی و تصاویر ابرطیفی ارائه شده است.

۱-۳ مسئله فراتفکیک‌پذیری^۲

فراتفکیک‌پذیری از جمله مسائل حوزه پردازش تصویر است که تحقیقات زیادی را به خود معطوف نموده است [۲۰، ۲۱]. در کاربرد موردنظر در اینجا، هدف مسئله، به دست آوردن تصویر با تفکیک‌پذیری بالا از روی یک تصویر با تفکیک‌پذیری پایین است که در ادبیات به فراتفکیک‌پذیری بر مبنای نمونه معروف است.

دو دسته روش کلی برای حل این مسئله وجود دارد: یکی استفاده از روش‌های نگاشتن همسایه^۳ و دیگری استفاده از نمایش‌های تنگ که جدیدترند و از نظر سرعت و حافظه‌ی مورد نیاز بسیار بهتر عمل می‌کنند. در حل مسئله‌ی فراتفکیک‌پذیری بر مبنای نمونه برای افزایش تفکیک‌پذیری به اطلاعاتی خارج از اطلاعات موجود در تصویر داده شده با تفکیک‌پذیری پایین نیاز داریم. این اطلاعات از نمونه‌هایی از قطعات به دست آمده از زوج تصاویر با تفکیک‌پذیری بالا و پایین که از قبل در اختیار داریم به دست می‌آیند. در روش‌های مبتنی بر نگاشتن همسایه، از این نمونه‌ها مستقیماً استفاده می‌شود، در حالی که در روش‌های مبتنی بر نمایش تنگ، از این قطعات برای آموزش دو دیکشنری که برای نمایش قطعات با تفکیک‌پذیری بالا و پایین به کار می‌روند، استفاده می‌شود. در این مسئله، دو دیکشنری، یکی برای تصاویر با تفکیک‌پذیری بالا و دیگری برای تصاویر با تفکیک‌پذیری

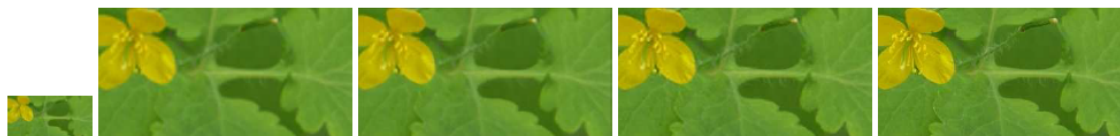
^۲Super-Resolution

^۳Neighbor embedding

پایین آموزش می بینند. با استفاده از ضرایب نمایش \mathbf{t} تک هر قطعه از ورودی های با تفکیک پذیری پایین برای تولید خروجی های تفکیک پذیری بالا استفاده می شود. مسئله ی پیدا کردن \mathbf{t} تک ترین نمایش از قطعه تصویر ورودی b در فراتفکیک پذیری بصورت زیر بیان می شود:

$$\min_x \|\mathbf{x}\|, \text{ subject to } \|FA_l\mathbf{x} - Fb\|_p^2 \leq \varepsilon \quad (1-3)$$

که در آن x بیانگر ضرایب \mathbf{t} تک، F بیانگر عملگر استخراج ویژگی که همان پیش شرطساز ارائه شده در پیوست آ است، و A_l معرف دیکشنری با تفکیک پذیری پایین است. پس از بدست آمدن ضرایب \mathbf{t} تک x ، قطعه تصویر با تفکیک پذیری بالا به صورت $b_h \approx A_h x$ حاصل می شود که در آن A_h بیانگر دیکشنری با تفکیک پذیری بالاست. تاثیر \mathbf{t} تک بودن در زمینه فراتفکیک پذیری نشان داده است این الگوریتم ها تصاویر با تفکیک پذیری بالا را تولید می کنند که در رقابت با روش های دیگر کیفیت بهتری دارند. بعلاوه این ارائه ی مبتنی بر \mathbf{t} تک در برابر نویز هم مقاوم است بنابراین در ورودی های نویزی کاربرد دارد. شکل ۳-۱ مقایسه بین روش نمایش \mathbf{t} تک در فراتفکیک پذیری، روش مبتنی بر نگاشتن همسایه و روش درونبایی چندوجهی^۱ را نشان می دهد.



شکل ۳-۱: تغییر تصویر گل با ضریب بزرگنمایی ۳: به ترتیب از چپ به راست، تصویر ورودی، فراتفکیک پذیری با روش درونبایی چندوجهی، با روش مبتنی بر نگاشتن همسایه، فراتفکیک پذیری با نمایش \mathbf{t} تک، و تصویر اصلی.

۲-۳ نمایش \mathbf{t} تک برای طبقه بندی تومورهای سرطانی با استفاده از داده های

ژنی^۲

از جمله کاربردهای نمایش \mathbf{t} تک در زمینه پزشکی می توان به طبقه بندی تومورهای سرطانی اشاره کرد. تنوع ژن های سرطانی چالشی برای طبقه بندی تومورها بوجود آورده است. در [۲۲] روشی برای تشخیص سرطان با استفاده از داده های ژنی ارائه شده است. رفتار سرطان تا حد زیادی به دقت طبقه بندی تومور بستگی دارد. در این سیستم انتخاب ژن و طبقه بندی نمونه از اهمیت بالایی برخوردار است. در این کاربرد، ژن ها ویژگی های موردنظر هستند و بیماران نمونه ها هستند. مسئله طبقه بندی در این کاربرد، یافتن نمایش \mathbf{t} تک نمونه های تست با توجه به نمونه های

^۱Bicubic interpolation

^۲Sparse Representation for Classification of Tumors Using Gene Expression

آموزشی است. روش مورد استفاده در تعیین پاسخ تَنک، منظم‌سازی نُرم یک (۲-۴-۳) است. که این روش با روش ماشین بردار پشتیبان (SVM)^۱ مقایسه شده است.

این بخش شامل مجموعه داده آموزشی $\{(a_i, l_i); i = 1, \dots, m\}$ ، که $a_i \in \{1, 2, \dots, M\}$ ، i امین نمونه است که یک بردار ستونی n بعدی شامل مقادیر ژن و n بعنوان تعداد ژن‌ها است، l_i برچسب نمونه i با N طبقه است. که در این کاربرد $N = 6$ است، به این معنا که ۶ نمونه تومور در نظر گرفته شده است. و ترکیب خطی ستون‌های A در بردار تَنک، بیانگر ویژگی‌ای از ژنی است که در یک کلاس از تومور قرار می‌گیرد. برای یک نمونه تست b با n بعد، مسئله نمایش تَنک بردار ستونی $x = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$ را بصورت زیر می‌یابد:

$$b = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_m a_m$$

ماتریس A شامل $A = [a_1, a_2, \dots, a_m]$ ، بنابراین مسئله نمایش تَنک بصورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\min_x \|x\|_0 \quad \text{subject to } Ax = b \quad (2-3)$$

رابطه ۲-۳ در فصل دوم به تفصیل به آن پرداخته شد و انواع روش‌های حل این دستگاه معادلات مورد بررسی قرار گرفت. با توجه به روش حداقل مربعات منظم‌سازی نُرم یک، که در بخش ۲-۴-۳ مورد بررسی قرار گرفت، معادله ۲-۳ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$J(x, \lambda) = \min_x \|Ax - b\|_2 + \lambda \|x\|_1 \quad (3-3)$$

که با استفاده از یک روش نقطه درونی حل می‌شود. اگر λ در شرط زیر صدق کند، همگرایی این روش تضمین شده است.

$$\lambda \leq \|2A^T b\|_\infty$$

در نهایت خطای نمایش بدست آمده با همه کلاس مقایسه شده و داده تست به کلاسی تعلق دارد که خطای کمتری با آن کلاس داشته باشد.

آزمایشات عددی نشان داده است که روش نمایش تَنک قابل رقابت با SVMs است. الگوریتم ۱-۳ الگوریتم طبقه‌بندی تومورهای سرطانی جهت تشخیص سرطان ارائه شده در کاربرد است.

^۱Support Vector Machine

Require: $\{(a_i, b_i); i = 1, \dots, m\}$, and b

- 1: Normalize $a_i, i = 1, 2, \dots, m$ and b
- 2: Create matrix A
- 3: Solve the optimization problem
- 4: Compute $g_k(b), k = 1, 2, \dots, N$
- 5: **return** $argmin g_k(b)$

۳-۳ طبقه‌بندی تصاویر ابرطیفی با استفاده از دیکشنری بر پایه نمایش تُنک^۱

از جمله کاربردهای دیگر نمایش تُنک در طبقه‌بندی، طبقه‌بندی تصاویر ابرطیفی است. تصویربرداری ابرطیفی^۲ یا به اختصار (HSI)، گونه‌ای تصویربرداری است که از سراسر طیف الکترومغناطیسی داده‌ها را گردآوری و پردازش می‌کند. برخلاف چشم انسان که تنها می‌تواند نور قابل دیدار را ببیند، تصویربرداری فراطیفی بیشتر با چشم‌های میگوی آخوندکی شباهت دارد که قادر به دیدن نور قابل دیدار به علاوه پرتوهای فرابنفش و فروسرخ است. میگوی آخوندکی قادر است انواع مرجان‌های دریایی، طعمه‌ها یا طعمه‌خواران را از هم بازشناسد در صورتی که همه این‌ها ممکن است به چشم انسان به صورت هم‌رنگ دیده شوند. انسان‌ها انواع حسگرها و سامانه‌های پردازشی با این توانایی ساخته‌اند و از کارکردهای آن‌ها در کشاورزی، کانی‌شناسی، فیزیک و پایش بهره می‌گیرند. سنسورها- سنجنده‌های- ابرطیفی با بهره‌گیری از بخش بزرگی از طیف الکترومغناطیسی به اشیاء می‌نگرند.

برخی شیء‌ها در طیف الکترومغناطیسی دارای نشانه‌های ویژه و یگانه‌ای هستند. این نشانه‌های ویژه که به عنوان «امضاءهای طیفی» معروفند به بازشناسی مواد در تصویرهای اسکن شده از مواد کمک می‌کنند. برای نمونه کانی‌شناسان می‌توانند با در دست داشتن امضای طیفی نفت، در میان لایه‌های زمین میدان‌های نفتی جدید را تشخیص بدهند. داده‌کاوی ابرطیفی فرایندی پیچیده است و هزینه زیادی دارد.

در [۲] الگوریتم پایه ی تُنکی جدیدی برای طبقه‌بندی تصاویر ابرطیفی ارائه شده است. الگوریتم مطرح شده براساس مشاهداتی است که یک پیکسل ابرطیفی می‌تواند بصورت تُنک توسط ترکیب خطی تعداد کمی از نمونه‌های آموزشی که ساختار دیکشنری را تشکیل داده‌اند نمایش داده شود. نمایش تُنک یک سیگنال ناشناخته، با ابزاری همچون یک بردار تُنک که ورودی‌های غیرصفر آن منتظر با وزن نمونه‌های آموزشی انتخاب شده است،

^۱Hyperspectral Image Classification Using Dictionary-Based Sparse Representation ^۲Hyperspectral image

امکان پذیر است.

در این روش از طریق یک مدل تنکی مشترک، که در آن پیکسل‌های ابرطیفی داخل یک همسایگی کوچک حول پیکسل آزمون بطور همزمان با ترکیب‌های خطی چند نمونه آموزشی مشترک که با مجموعه ضرایب متفاوتی برای هر پیکسل وزن‌گذاری شده‌اند نمایش داده می‌شود. در این روش نمایش بردار تنک، ضروری است که پیکسل‌های همسایه یک مجموعه پشتیبانی مشترک متناظر با اتم‌های مشترکی که از دیکشنری آموزشی می‌گیرند داشته باشند.

الگوریتم پایه تنکی مطرح شده برای چندین تصویر ابرطیفی واقعی برای طبقه‌بندی انجام می‌شود. نتایج تجربی نشان می‌دهد که الگوریتم مطرح شده در بیشتر موارد بهتر از طبقه‌بندی کلاسیک، ماشین بردار پشتیبان^۱ است.

یک کاربرد خیلی مهم HSI طبقه‌بندی تصویر، در مواردی که پیکسل‌ها دارای برچسب یک کلاس هستند، است. تکنیک‌های مختلفی برای طبقه‌بندی HSI پیشرفت داده شده است. در میان روش‌های قبلی، SVM ها [۲۳] [۲۴] ابزار قدرتمندی برای حل مسائل طبقه‌بندی با نظارت برای داده با ابعاد بالا هستند و کارایی خوبی برای طبقه‌بندی تصاویر ابرطیفی از خودشان نشان داده‌اند.

در مدل تنکی^۲ ارائه شده پیکسل‌هایی که دارای امضای طیفی یکسان هستند متعلق به یک کلاس هستند. فرض کنید M کلاس مجزا داشته باشیم و m امین کلاس N_m نمونه آموزشی داشته باشد. $\{a_j^m\}_{j=1 \dots N_m}$ و b پیکسل ابرطیفی با بعد B (تعداد باندهای فضا) باشد. (b مشاهدات است). اگر b متعلق به m امین کلاس باشد، آنگاه b یک تخمین طیفی در زیرفضای ابعاد پایین توسط نمونه‌های آموزشی $\{a_j^m\}$ در m امین کلاس دارد. پیکسل b می‌تواند بطور کامل توسط ترکیب خطی این نمونه‌های آموزشی نمایش داده شود.

$$b \approx x_1^m a_1^m + x_2^m a_2^m + \dots + x_{N_m}^m a_{N_m}^m = \underbrace{[a_1^m \ a_2^m \ \dots \ a_{N_m}^m]}_{A^m} \underbrace{[x_1^m \ x_2^m \ \dots \ x_{N_m}^m]^T}_{\mathbf{x}^m} = A^m \mathbf{x}^m \quad (۳-۴)$$

A^m یک $B \times N_m$ کلاس است. که زیرمجموعه دیکشنری است و ستون‌های آن نمونه‌های آموزشی در m امین کلاس هستند. و \mathbf{x}^m یک بردار تنک است. یعنی برداری است که تعداد عناصر غیرصفر آن اندک است. بنابراین یک نمونه تست ناشناخته می‌تواند مدل شود و در یک زیرفضای واحد M همراه با کلاس M قرار گیرد.

با ترکیب کلاس‌های هر دیکشنری و زیرمجموعه‌ای از دیکشنری اصلی $\{A^m\}_{m=1 \dots M}$ ، یک نمونه تست b

^۱Support vector machines(SVM)

^۲Sparsity model

می‌تواند بصورت زیر نمایش داده شود x

$$b = A^1 x^1 + A^2 x^2 + \dots + A^M x^M = [A^1 \dots A^M] \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^M \end{bmatrix} = Ax \quad (5-3)$$

$A^{B \times N}$ دیکشنری شامل نمونه‌های آموزشی از همه کلاس‌ها با $N = \sum_{m=1}^M N_m$ و x یک بردار N تکی بعدی است که از الحاق بردارهای N تکی $\{x^m\}_{m=1 \dots M}$ شکل گرفته است.

در حالت ایده‌آل اگر x متعلق به m امین کلاس باشد آنگاه $x^j = 0 \quad \forall j = 1 \dots M \quad j \neq m$ در دیکشنری A شامل نمونه‌های آموزشی است که بطور مستقیم از تصویر مورد علاقه مورد بحث جمع‌آوری شده است. اما یک دیکشنری قوی‌تر می‌تواند با تکنیک یادگیری دیکشنری [25] [26]، یا با ایجاد زیرفضای اختصاصی برای هر کلاس از طریق آنالیز مولفه‌های اصلی (PCA) [27] [28] تشکیل شود. در ادامه نشان می‌دهیم که چگونه x بدست آمده و چگونه نمونه تست با استفاده از آن طبقه‌بندی می‌شود.

بازسازی و طبقه‌بندی^۲ ابتدا مسئله بازسازی را یافتن بردار N تکی x برای نمونه آزمون b در نظر می‌گیریم. با داشتن نمونه‌های آموزشی A بازسازی x که در $Ax = b$ صدق کند از حل مسئله بهینه‌سازی زیر بدست می‌آید

$$\hat{x} = \arg \min \|x\|, \quad \text{subject to } Ax = b \quad (6-3)$$

در معادله ۳-۶ فرض شده است که سیگنال کامل و بدون نویز باشد، اما در داده واقعی مقداری نویز هرچند کم وجود دارد. بنابراین برای لحاظ کردن خطاهای تقریب در داده‌های تجربی، محدودیت تساوی در ۳-۶ می‌تواند به نامعادله زیر تسهیل یابد

$$\hat{x} = \arg \min \|x\|, \quad \text{subject to } \|Ax - x\|_p \leq \sigma \quad (7-3)$$

σ خطای تلورانس است. مسئله ذکر شده می‌تواند به صورت کمینه‌سازی خطای تقریب در یک سطح پراکنندگی

^۱Principal component analysis

^۲Reconstruction and classification

معین نیز در نظر گرفته شود

$$\hat{x} = \arg \min \|Ax - b\|_p \quad \text{subject to } \|x\|_0 \leq K. \quad (8-3)$$

K یک کران بالای مشخص در سطح تُنکی است. مسئله ذکر شده همانطور که پیش تر ذکر شد یک مسئله NP-hard است، اما می تواند بصورت تقریبی و از طریق الگوریتم های جستجوی حریصانه^۱ از قبیل جستجوی تطابقی متعامد^۲ یا روش جستجوی زیرفضا^۳ [۲۹] حل شود.

از الگوریتم حریصانه OMP ارائه شده در بخش (۲-۲-۲) و SP ارائه شده در (۲-۴-۲) برای حل مسئله بهینه سازی مقید تُنکی ۸-۳ در حل مسئله حذف نویز BP استفاده می شود.

کلاس b می تواند بطور مستقیم از ویژگی های بردار تُنک بازسازی شده \hat{x} معین گردد. باقی مانده m ام (یعنی خطای بین نمونه ی آزمون و بازسازی از نمونه های آموزش در دسته m ام) به این صورت تعریف می شود

$$r^m(x) = \|b - A^m \hat{x}\|_p, \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (9-3)$$

که \hat{x}^m نسبت ضرایب تُنک بازیابی شده متناظر با نمونه های آموزش در کلاس m ام را نشان می دهد. کلاس b آنگاه به صورت کلاس با باقی مانده کمینه تعیین می گردد

$$Class(b) = \arg_{m=1, \dots, M} \min r^m(b) \quad (10-3)$$

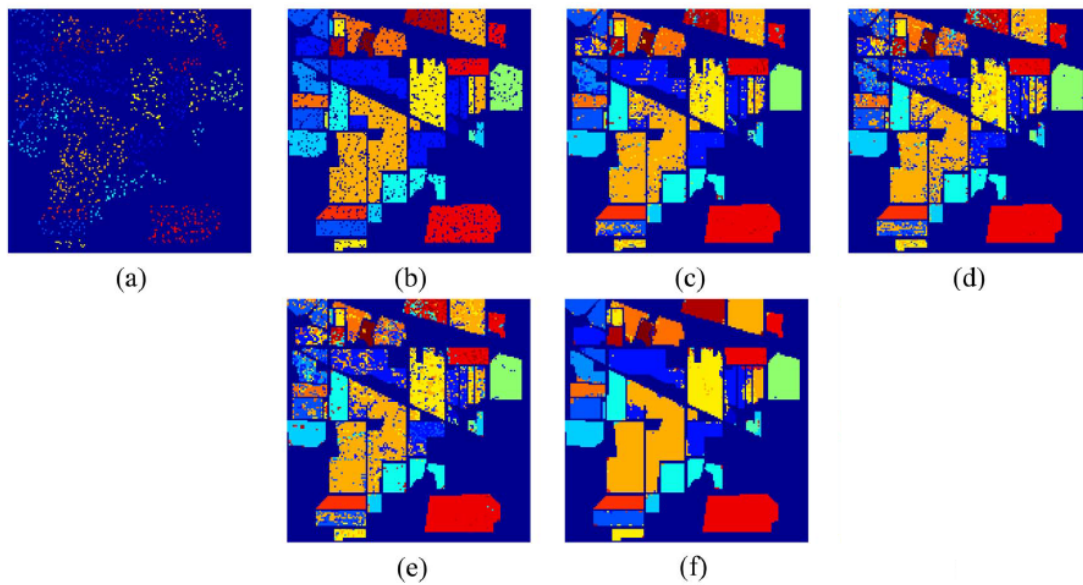
تصویر ابرطیفی ۲-۳ یک تصویر پرکاربرد از کاج های هندی گرفته شده توسط طیف سنج تصویر برداری مادون قرمز مرئی هوابرد

(AVIRIS) می باشد. این تصویر دارای تفکیک مکانی $20m$ در هر پیکسل و ابعاد فضایی 145×145 است و شامل ۱۶ دسته زمینی است، که اغلب آن ها انواع مختلفی از محصولات زراعی می باشند (مانند ذرت، گندم، سویا و ...). برای هر یک از ۱۶ دسته به صورت تصادفی حدود ۱۰ درصد از نمونه های برچسب خورده برای آموزش و ۹۰ درصد مابقی برای آزمون انتخاب شده است.

^۱Greedy pursuit algorithms

^۲Orthogonal Matching Pursuit (OMP)

^۳Subspace Pursuit (SP)



شکل ۳-۲: تصویر کاج‌های هندی: مجموعه آموزشی (a) مجموعه تست (b) نقشه طبقه‌بندی بدست آمده توسط روش SVM (c), SP (d), OMP (e), SOMP (f)

فصل ۴

روش پیشنهادی

در فصل ۲ انواع روش‌های پرکاربرد در حوزه نمایش تُتک معرفی شد. همانطور که بیان شد، تفاوت اصلی روش‌های حل نمایش تُتک در نوع نُرم بکار گرفته شده در فرمول‌بندی مسئله می‌باشد. در این فصل نُرم بلوکی که در بخش ۱-۳-۴ ارائه شد برای حل نمایش تُتک پیشنهاد شده است. برای این منظور چگونگی بکارگیری نُرم بلوکی در حل بهینه‌سازی تُتک بیان شده و شیوه پیشنهادی با دو تا از روش‌های پایه‌ای بهینه‌سازی تُتک مورد مقایسه قرار گرفته است. نتایج آزمایشات روی داده‌های مصنوعی و در کاربرد فراتفکیک‌پذیری کارایی روش پیشنهادی را نشان داده است.

۱-۴ روش نُرم بلوکی برای حل نمایش تُتک^۲

مسئله آشنای زیر را در نظر بگیرید:

$$(p^\varepsilon) : \min_x \|x\|_0, \text{ subject to } \|b - Ax\|_1 \leq \varepsilon \quad (1-4)$$

در بخش ۱-۳-۲ این مسئله با نزدیک‌ترین نُرم محدب به نُرم صفر، یعنی نُرم یک، بصورت زیر جایگزین شد:

$$\min_x \|x\|_1, \text{ subject to } \|Ax - b\|_1 \leq \varepsilon \quad (2-4)$$

^۲Block Norm

طبق رابطه زیر:

$$\|Ax - b\|_\infty < \|Ax - b\|_p < \|Ax - b\|_1$$

اگر جمله $\|Ax - b\|_1$ کوچکتر از هر ε باشد، آنگاه جمله $\|Ax - b\|_p$ حتما کوچکتر از ε خواهد بود. در نتیجه می توان با تلفیق این ایده با رابطه ۲-۴ را به شکل زیر تعریف کرد:

$$\min_x \|x\|_1 \quad \text{subject to} \quad \|Ax - b\|_1 \leq \varepsilon \quad (۳-۴)$$

که برای حل آن می توان از آنچه در بخش ۱-۳-۴ بیان شد، بصورت زیر بهره گرفت.

فرض کنید $D = \{d_1, \dots, d_m, d'_1, \dots, d'_m\}$ مجموعه جهت های فرین دایره یکانی با نرم l_1 باشد. در این

صورت مسئله ۳-۴ را می توان بصورت زیر بازنویسی کرد:

$$\min_{\lambda} \sum_{i=1}^m \lambda_i + \sum_{i=1}^m \lambda'_i$$

s.t

$$x = \sum_{i=1}^m \lambda_i d_i + \sum_{i=1}^m \lambda'_i d'_i$$

$$Ax - b = \sum_{i=1}^n \lambda_i d_i + \sum_{i=1}^n \lambda'_i d'_i$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i + \sum_{i=1}^n \lambda'_i < \varepsilon$$

$$\lambda_i, \lambda'_i, \lambda_i, \lambda'_i \geq 0 \quad (۴-۴)$$

اکنون مسئله ما تبدیل به یک مسئله برنامه ریزی خطی می شود که با استفاده از روش های نقطه داخلی یا سیمپلکس قابل حل است.

مثال ۴-۱-۱. بعنوان مثال، ماتریس A و بردار b با درایه های زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

در این مثال تعداد سطرهای ماتریس A برابر با $n = 2$ و تعداد ستون‌ها برابر $m = 3$ است. حال به حل مسئله ۳-۴ با ورودی‌های فوق می‌پردازیم:

مرحله اول ساخت جهت‌های فرین برای $\|x\|_1$:

$$D_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

مرحله دوم ساخت جهت‌های فرین برای $\|b - Ax\|_1$:

$$D_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

مرحله سوم اکنون باید مسئله ۳-۴ را با پارامترهای ارائه شده بصورت مسئله ۴-۴ بازنویسی کرد:

$$\min_{\lambda} \sum_{i=1}^3 \lambda_i + \sum_{i=1}^3 \lambda'_i$$

s.t

$$x = \sum_{i=1}^3 \lambda_i d_i + \sum_{i=1}^3 \lambda'_i d'_i$$

$$Ax - b = \sum_{i=1}^2 \lambda_i^{\circ} d_i^{\circ} + \sum_{i=1}^2 \lambda_i^{\prime \circ} d_i^{\prime \circ}$$

$$\sum_{i=1}^2 \lambda_i^{\circ} + \sum_{i=1}^2 \lambda_i^{\prime \circ} < \varepsilon$$

$$\lambda_i, \lambda'_i, \lambda_i^{\circ}, \lambda_i^{\prime \circ} \geq 0$$

شرایط تساوی بصورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_3 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_1^0 & 0 & \lambda_1^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_2^0 & 0 & \lambda_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

و شرایط نامساوی نیز بصورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1] < \varepsilon$$

اکنون با استفاده از یکی از روش‌های نقطه داخلی یا سیمپلکس مسئله مورد نظر حل شده و پاسخ دقیق مسئله بدست می‌آید.

برنامه متلب این روش که با نام روش BN نام گذاری شده است، در پیوست ب-۴ آورده شده است.

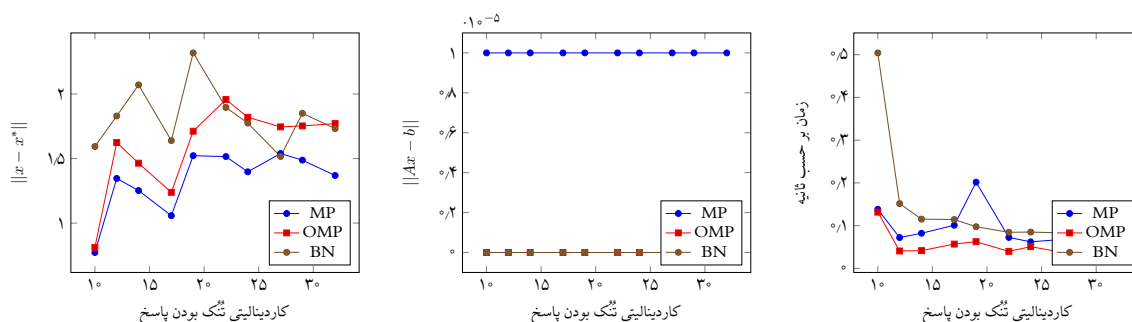
۱-۱-۴ نتایج آزمایشات در داده‌های مصنوعی

در این بخش برای مسئله ۱-۴ ماتریس A و جواب واقعی x^* به صورت تصادفی تولید شده و بر اساس آنها پاسخ b تولید می‌شود. با دادن ماتریس‌های A و b به الگوریتم‌های مختلف، دقت آنها در برآورد جواب بهینه مورد مقایسه قرار گرفته است. به این منظور ماتریس‌های فوق در ابعاد مختلف (جدول ۱-۴) تولید شده و در هر اندازه، برای ۱۰ میزان تنگی مختلف مقایسات انجام شده است. معیارهای مورد مقایسه نرم اختلاف پاسخ بدست آمده و مقدار جواب بهینه (x^*) و مقدار $\|b - Ax\|_2^2$ می‌باشد. نمودارهای ۱-۴ و ۳-۴ نتایج مقایسات بر روی دو مجموعه داده اول و سوم از جدول ۱-۴ را نشان می‌دهد. نتایج نشان داده شده، هر یک میانگین ۵ اجرای مختلف می‌باشند. نتایج مجموعه داده دوم مشابه مجموعه داده سوم بود که به جهت اختصار از نمایش آن صرف نظر شده است. بررسی نمودارهای مربوط به مقایسه $\|Ax - b\|$ در شکل‌های ۱-۴ و ۳-۴ نشان می‌دهد که اگر ابعاد ماتریس

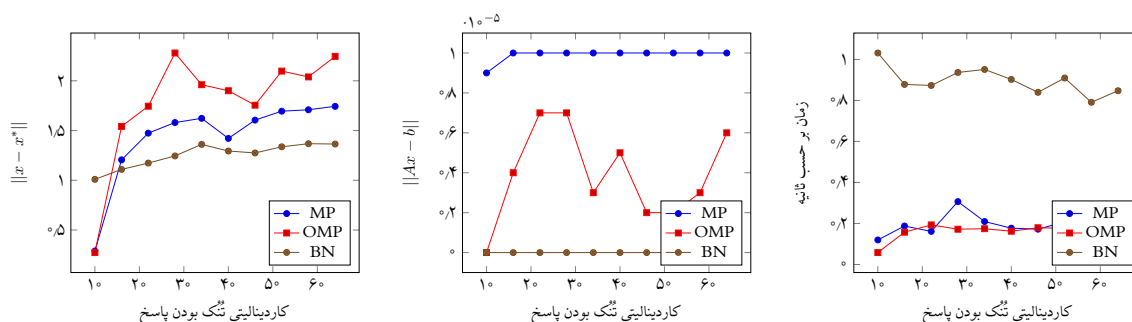
جدول ۴-۱: مشخصات ماتریس $A_{n \times m}$ مورد استفاده در آزمایشات

شماره مجموعه	n	m
1	32	128
2	64	512
3	128	1024

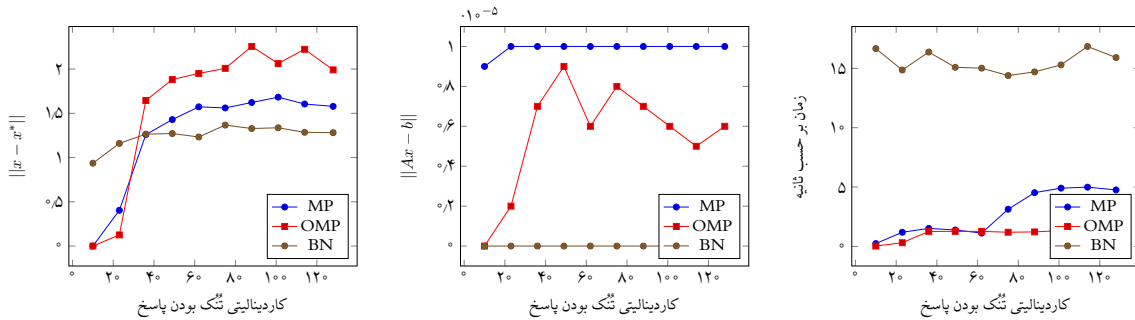
A کوچک باشد، نتایج روش پیشنهادی نرم بلوکی، بهتر از روش MP و مشابه با OMP است؛ هر دو روش پیشنهادی و OMP خطای نزدیک به صفر دارند. با افزایش اندازه ماتریس A ، روش پیشنهادی همچنان خطای نزدیک به صفر خود را حفظ کرده است، اما دو روش دیگر افزایش خطا داشته‌اند. در معیار $\|x - x^*\|$ (نمودارهای میانی شکل‌های ۴-۱ و ۴-۲) در ابعاد بالاتر، شیوه پیشنهادی کارایی بهتری داشته است. عیب شیوه پیشنهادی زمان اجرای بیشتر آن است. در اندازه‌های بزرگ، زمان اجرای روش پیشنهادی حدود ۳ برابر روش OMP بوده است. بزرگترین اندازه‌های ماتریس در نظر گرفته شده در جدول ۴-۱ به نحوی در نظر گرفته شده است که مطابق اندازه تقریبی ماتریس A در کاربرد فراتفکیک پذیری بخش بعد باشد.



شکل ۴-۱: نتایج مقایسات مجموعه داده ۱ در جدول ۴-۱



شکل ۴-۲: نتایج مقایسات مجموعه داده ۲ در جدول ۴-۱



شکل ۳-۴: نتایج مقایسات مجموعه داده ۳ در جدول ۳-۱

۲-۴ اعمال روش نُرم بلوکی در مسئله فراتفکیک پذیری

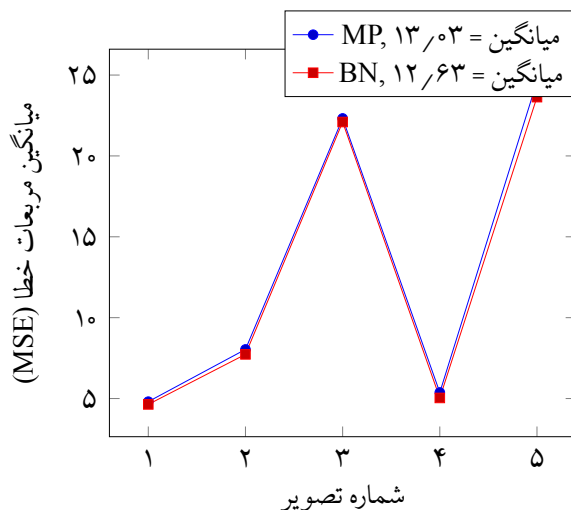
در کاربرد فراتفکیک پذیری این فصل، یک دیکشنری از روی مجموعه‌ای از تصاویر شامل تصاویر طبیعت، حیوانات و چهره انسان فراهم شده است و هدف فقط پیدا کردن تَنگ‌ترین نمایش تصویر ورودی با این دیکشنری و افزایش وضوح تصویر ورودی بوده است. به این منظور ۵ تصویر نمایش داده شده در جدول ۲-۴ مورد پردازش قرار گرفتند. نتایج بصری در همین جدول و نتایج کمی در نمودارهای ۴-۴ و ۴-۵ آمده است.

ستون اول جدول مذکور شماره تصویر را نشان می‌دهد که در نمودارهای مقایسات کمی مورد استفاده قرار خواهد گرفت. ستون دوم، تصویر اصلی با وضوح بالا را نشان می‌دهد. هر تصویر با مقیاس یک دوم کوچک شده و سعی شده است با روش‌های مختلف بهینه‌سازی تَنگ و مثبتی بر یک دیکشنری، وضوح آنها افزایش داده شود. ستون سوم (NN) تصویر ورودی است که با روش نزدیک‌ترین همسایگی (Nearest Neighbour) بزرگ‌نمایی شده است. ستون چهارم (BC) نمایش دهنده افزایش اندازه تصویر با روش Bicubic می‌باشد. ورودی روش‌های فراتفکیک‌پذیری، تصویر نمایش داده در ستون سوم + فرهنگ لغت است. ستون بعد (MP) نتیجه استفاده از روش جستجوی تطابقی و ستون آخر (BN) نتیجه استفاده از شیوه پیشنهادی در بهینه‌سازی تَنگ مسئله را نشان می‌دهد. نتایج جدول ۲-۴ نشان می‌دهد که روش پیشنهادی در افزایش وضوح موفق بوده است و هر تصویر فراتفکیک‌پذیری بهتری نسبت به تصویر ورودی (ستون سوم) داشته است.

علی‌رغم اینکه در داده‌های مصنوعی بخش پیش، OMP نتایج بهتری تولید کرده بود، اما در عمل نتایج مناسبی نداشت. خروجی آن برای اولین شکل مورد آزمایش را در شکل ۳-۴ مشاهده می‌کنید. لذا از ذکر نتایج این روش در جدول نتایج صرف‌نظر شده است.



شکل ۳-۴: خروجی نامناسب روش OMP بر روی اولین شکل.

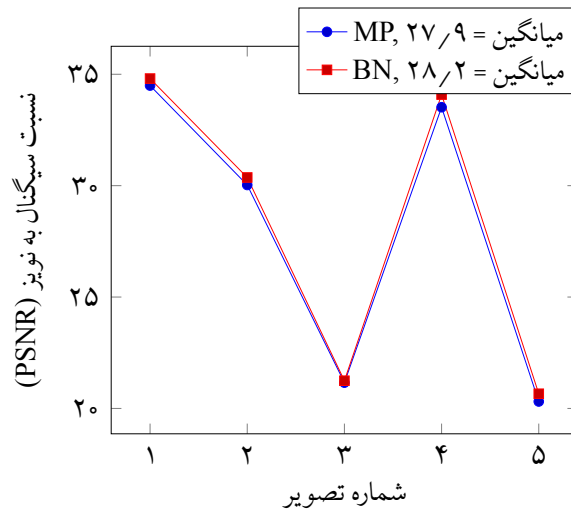


شکل ۴-۴: مقایسه میانگین مربعات خطا بین خروجی روش‌های مختلف و تصویر اصلی.

۳-۴ جمع‌بندی

در این نوشتار با استفاده از ترم بلوکی، روش بهینه‌سازی تئک بهبود داده شده است. نتایج اجرا بر روی داده‌های تولید شده به صورت مصنوعی کارایی بهتر آن نسبت به دو روش مشهور در حوزه نمایش تئک را نشان داد. برتری شیوه پیشنهادی در ابعاد بزرگ ماتریس A مشهودتر است. با استفاده از شیوه پیشنهادی می‌توان جواب تئکی پیدا نمود که خطای $\|Ax - b\|$ کمتر از هر مقدار کوچک دلخواه باشد. هزینه این دقت، افزایش زمان اجرای روش پیشنهادی نسبت به دو روش قبلی است. به عنوان کار آتی، مؤلفین افزایش سرعت شیوهی پیشنهادی را مدنظر دارند. شیوه پیشنهادی در کاربرد فراتفکیک‌پذیری نیز مورد استفاده قرار گرفت. نتایج بصری خروجی مناسب و نتایج کمی، بهتر بودن این شیوه نسبت به دیگر روش‌های مورد مقایسه را نشان داده است. در این کاربرد فقط در مرحله نمایش تئک تصویر با فرهنگ لغت موجود، از شیوه پیشنهادی بهره گرفته شده است. استفاده از روش پیشنهادی در تولید فرهنگ لغت، در آینده مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

نتایج کمی مقایسات در نمودارهای ۴-۴ و ۵-۴ و بر اساس معیارهای «میانگین مربعات خطا» و «نسبت سیگنال به نویز» برتری نسبی شیوه پیشنهادی نسبت به روش MP را نشان می‌دهد.



شکل ۴-۵: مقایسه مقدار نسبت سیگنال به نویز.

جدول ۴-۲: مقایسه روش‌های مختلف در افزایش وضوح تصاویر مختلف. ابعاد تصویر اصلی نصف شده و با روش‌های مختلف بزرگ‌نمایی، یا افزایش وضوح داده شده است.

ردیف	تصویر اصلی	NN	BC	MP	BN
۱					
۲					
۳					
۴					
۵					

فهرست منابع

- [1] Wright, John, Ma, Yi, Mairal, Julien, Sapiro, Guillermo, Huang, Thomas S, and Yan, Shuicheng. Sparse representation for computer vision and pattern recognition. *Proceedings of the IEEE*, 98(6):1031–1044, 2010.
- [2] Chen, Yi, Nasrabadi, Nasser M, and Tran, Trac D. Hyperspectral image classification using dictionary-based sparse representation. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 49(10):3973–3985, 2011.
- [3] Elad, Michael. *Sparse and Redundant Representations: From Theory to Applications in Signal and Image Processing*. Springer Publishing Company, Incorporated, 1st ed., 2010.
- [4] Donoho, David L, Elad, Michael, and Temlyakov, Vladimir N. Stable recovery of sparse overcomplete representations in the presence of noise. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 52(1):6–18, 2006.
- [5] Tarantola, Albert. *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation*. siam, 2005.
- [6] Klamroth, Kathrin. *Single-facility location problems with barriers*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [7] Luenberger, DG and Ye, Y. *Linear and nonlinear programming*., Springer 2008.
- [8] صادقی، مصطفی. نمایش تَنگ و کاربرد آن در نويز زدایی تصاویر. پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشکده برق، دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۹۱.
- [9] Donoho, David L and Huo, Xiaoming. Uncertainty principles and ideal atomic decomposition. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 47(7):2845–2862, 2001.
- [10] Tropp, Joel A and Wright, Stephen J. Computational methods for sparse solution of linear inverse problems. *Proceedings of the IEEE*, 98(6):948–958, 2010.

- [11] Mallat, Stéphane G and Zhang, Zhifeng. Matching pursuits with time-frequency dictionaries. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 41(12):3397–3415, 1993.
- [12] Chen, Scott Shaobing, Donoho, David L, and Saunders, Michael A. Atomic decomposition by basis pursuit. *SIAM review*, 43(1):129–159, 2001.
- [13] Needell, Deanna and Tropp, Joel A. Cosamp: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 26(3):301–321, 2009.
- [14] Tropp, Joel A and Needell, Deanna. Cosamp: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples. tech. rep., 2008.
- [15] Kim, Seung-Jean, Koh, Kwangmoo, Lustig, Michael, Boyd, Stephen, and Gorinevsky, Dmitry. An interior-point method for large-scale-regularized least squares. *IEEE journal of selected topics in signal processing*, 1(4):606–617, 2007.
- [۱۶] رشیدآبادی، فرزانه. برش هوشمند تصویر. پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشکده ریاضی، دانشگاه حکیم سبزواری، ۱۳۹۴.
- [17] Hastie, Trevor, Tibshirani, Robert, and Friedman, Jerome. *The Elements of Statistical Learning*. Springer Series in Statistics. Springer New York Inc., New York, NY, USA, 2008.
- [18] Pendse, Gautam V. A tutorial on the lasso and the “shooting algorithm”. tech. rep., P.A.I.N Group, Imaging and Analysis Group - McLean Hospital, Harvard Medical School, 2011.
- [19] Mohimani, Hosein, Babaie-Zadeh, Massoud, and Jutten, Christian. A fast approach for overcomplete sparse decomposition based on smoothed norm. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 57(1):289–301, 2009.
- [20] Amintoosi, M., Fathy, M., and Mozayani, N. Precise image registration with structural similarity error measurement applied to super-resolution. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2009:7 pages, 2009. Article ID 305479.
- [21] Yang, Jianchao, Wright, J., Huang, T.S., and Ma, Yi. Image super-resolution via sparse representation. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 19(11):2861–2873, Nov 2010.
- [22] Hang, Xiyi and Wu, Fang-Xiang. Sparse representation for classification of tumors using gene expression data. *BioMed Research International*, 2009, 2009.

- [23] Boser, Bernhard E, Guyon, Isabelle M, and Vapnik, Vladimir N. A training algorithm for optimal margin classifiers. in *Proceedings of the fifth annual workshop on Computational learning theory*, pp. 144–152. ACM, 1992.
- [24] Vapnik, Vladimir. *The nature of statistical learning theory*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [25] Aharon, Michal, Elad, Michael, and Bruckstein, Alfred. *rmk*-svd: An algorithm for designing overcomplete dictionaries for sparse representation. *IEEE Transactions on signal processing*, 54(11):4311–4322, 2006.
- [26] Rubinstein, Ron, Bruckstein, Alfred M, and Elad, Michael. Dictionaries for sparse representation modeling. *Proceedings of the IEEE*, 98(6):1045–1057, 2010.
- [27] Bioucas-Dias, José M and Nascimento, José MP. Hyperspectral subspace identification. *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, 46(8):2435–2445, 2008.
- [28] Yang, Jinn-Min, Kuo, Bor-Chen, Yu, Pao-Ta, and Chuang, Chun-Hsiang. A dynamic subspace method for hyperspectral image classification. *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, 48(7):2840–2853, 2010.
- [29] Dai, Wei and Milenkovic, Olgica. Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 55(5):2230–2249, 2009.
- [30] Saad, Yousef. *Iterative methods for sparse linear systems*. Siam, 2003.
- [31] Pintér, János D. Global optimization in practice: State of the art and perspectives. in *Advances in Applied Mathematics and Global Optimization*, pp. 377–404. Springer, 2009.
- [32] Xiong, Hailing, Peng, Xihua, Chen, Shanxiong, and Yu, Xianping. Combinatorial optimization based on conjugate gradient and orthogonal triangular decomposition for sparse recovery.

پیوست آ

پیش شرط ساز

آ-۱ مفاهیم اولیه

در علم کامپیوتر پیش شرط سازی^۲ عملیاتی است جهت آماده سازی چیزی که قبل از چیز دیگری باید وجود داشته باشد. برای درک بهتر، عملیات فاکتوریل^۳ را در نظر بگیرید: در این عملیات عددی که فاکتوریل آن قرار است محاسبه شود باید از نوع عدد صحیح باشد، پس قبل از فاکتوریل گیری عدد به یک عدد صحیح تبدیل می شود، این فرایند مفهوم پیش شرط سازی است. در ریاضیات، پیش شرط سازی، هرگونه تغییر صریح یا ضمنی یک سیستم خطی اصلی است که حل آن را بوسیله یک روش تکراری معین ساده تر می کند.

سیستم خطی

$$Ax = b \quad (1-آ)$$

را در نظر بگیرید. که $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ماتریس نامتقارن، با بعد بزرگ و تَنگ می باشد. همچنین $x, b \in \mathbb{R}^n$ می باشند. روش های زیرفضای کرلیف^۴ از جمله روش های تکراری برای حل دستگاه آ-۱ می باشد. به منظور شتاب بخشیدن در روند یافتن پاسخ x ، از ماتریس های پیش شرط استفاده می شود. با استفاده از ماتریس پیش شرط، دستگاه آ-۱ به دستگاه پیش شرط شده تبدیل می شود و سپس دستگاه پیش شرط شده توسط روش های زیرفضای کرلیف حل می شود [۳۰]. ایده اصلی در هر پیش شرط سازی برای حل چنین دستگاهی، تغییر این سیستم به شکل زیر است

$$M^{-1}Ax = M^{-1}b. \quad (2-آ)$$

^۲Preconditioning

^۳ Factorial

^۴Krylov

که M^{-1} یک نگاشت پیچیده است که ممکن است از تبدیل‌های FFT، محاسبات انتگرالی، و حل‌های فرعی سیستم خطی استفاده کند، یافتن یک پیش‌شرط‌ساز مناسب برای حل سیستم خطی تنک، همچون ترکیب علم و هنر است. یک پیش‌شرط‌ساز بصورت هر حل‌کننده تقریبی جانبی که با یک تکنیک تکرار بیرونی، که اغلب با یکی از تکرارهای زیرفضای کرلیف ترکیب شده است، در نظر گرفته می‌شود.

در اینجا بعید است که ماتریس M و $M^{-1}A$ بتوانند بصورت صریح محاسبه شوند، برای محاسبه از روش‌های تکراری استفاده می‌شود. در عمل، پیش‌شرط‌سازی M^{-1} باید برای اعمال هر بردار دلخواه کم هزینه باشد. یکی از ساده‌ترین راه‌های تعریف یک پیش‌شرط‌ساز اجرای یک فاکتورگیری ناکامل روی ماتریس اصلی A است. این عمل عبارت است از تفکیک معادله $A = LU - R$ که L و U ساختار غیرصفر یکسان با اجزای بالایی و پایینی A دارند و R باقی مانده یا خطای فاکتورگیری است.

این فاکتورگیری ناکامل که بنام $ILU(0)$ است، اغلب ساده و کم‌هزینه است.

از سوی دیگر این عمل (فاکتورگیری ناکامل) اغلب منجر به یک تقریب خام می‌شود که می‌تواند در accelerator زیرفضای کرلیف که نیاز به تکرارهای فراوان برای همگرایی دارد جواب بدهد. بطور کلی فاکتورگیری‌های ILU دقیق‌تر نیازمند تکرارهای کمتری برای همگرایی هستند اما هزینه پیش‌شرط‌ساز برای محاسبه فاکتورها بیشتر است. در واقع یک رابطه معکوس^۱ بین هزینه ساخت پیش‌شرط‌ساز و همگرایی سریع وجود دارد. با این وجود اگر تنها بخاطر پایداری بیشتر باشد هم این رابطه معکوس اغلب به نفع فاکتورگیری‌های دقیق‌تر ختم می‌شود. این مطلب بویژه هنگامی صحیح است که چندین سیستم با ماتریس‌های یکسان باید حل شوند زیرا هزینه پیش‌شرط‌سازی می‌تواند کاهش یابد.

۲-آ فضای برداری

جهت تعریف یک فضای برداری نیازمند یک میدان هستیم. یک میدان مجموعه‌ای از اعداد یا اسکالرها به همراه اعمال جمع و ضرب است که دارای خواص طبیعی مانند شرکت‌پذیری، توزیع‌پذیری و جابجایی باشند. در ادامه تنها به فضاهای برداری روی میدان اعداد مختلط \mathbb{C} نیاز است.

مجموعه V را یک فضای برداری روی میدان اعداد مختلط \mathbb{C} گویند هرگاه دو عمل جمع بردارها و ضرب اسکالر بر روی آن تعریف شده باشد. به عنوان مثال فضای برداری \mathbb{C}^2 که شامل زوج‌های مرتب (c_1, c_2) از اعداد مختلط می‌باشد یک فضای برداری روی میدان اعداد مختلط است. جهت مفهوم فضای پوشش (گستره)^۲ تعریف زیر ارائه می‌شود:

^۱Trade off ^۲Span

Require: $A \in R^{n \times n}$.

// Initialize

- 1: Choose a vector, v_1 , such that $\|v\|_2 = 1$
- 2: **for** $j = 1, 2, \dots, m$ **Do: do**
- 3: Compute $h_{ij} = (Av_j, v_i)$ for $i = 1, 2, \dots, j$
- 4: Compute $w_j := Av_j - \sum_{i=1}^j h_{ij}v_i$
- 5: $h_{j+1,j} = \|w_j\|_2$
- 6: **If** $h_{j+1,j} = 0$ **then Stop**
- 7: $v_{j+1} = w_j/h_{j+1,j}$
- 8: **end for**

تعریف آ-۲-۱. زیرفضای برداری \mathbb{C}^n یک زیر مجموعه از v است که خود یک فضای برداری است. برای زیرمجموعه‌ای از بردارهای $G = \{v_1, v_2, \dots, v_q\}$ ، \mathbb{C}^n ، فضای پوشش داده شده توسط آن‌ها بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{span}\{G\} &= \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_q\} \\ &= \{z \in \mathbb{C}^n \mid z = \sum \alpha_i v_i; \{\alpha_i\}_{i=1, \dots, q} \in \mathbb{C}^q\} \end{aligned}$$

آ-۲-۱ روش‌های زیرفضای کریلف

فرض کنید x جواب اولیه سیستم خطی آ-۱ باشد. با در نظر گرفتن $r_0 = b - Ax$ ، زیرفضای کریلف $K_m(A, r_0)$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$K_m = K_m(A, r_0) = \text{span}\{r_0, Ar_0, \dots, A^{m-1}r_0\}$$

در واقع زیرفضای کریلف شامل همه بردارهای \mathbb{R}^n ، به شکل $p(A)r_0$ می‌باشد. p چند جمله‌ای برحسب A و از درجه نا بیشتر از $m - 1$ است. فرض کنید $v_1 = r_0 / \|r_0\|_2$ باشد. در این صورت الگوریتم آرنولدی آ-۱ پایه یک‌معامد^۲ برای زیرفضای کریلف K_m خواهد ساخت.

^۱Arnoldi ^۲Orthonormal

روش‌های زیرفضای کرلیف نمونه‌ای از روش‌های تصویری آ-۴-۱ می‌باشند که x_m جواب تقریبی سیستم آ-۱ در زیرفضای $x_0 + K_m$ جستجو می‌شود با این شرط که بردار مانده $b - Ax_m$ بر زیرفضای m بعدی دیگری مانند L_m عمود شود. انتخابهای متفاوتی برای L_m وجود دارد که یکی از آن‌ها $L_m = AK_m$ است. با انتخاب $L_m = AK_m$ ، جواب تقریبی x_m ، در زیرفضای $x_0 + K_m$ جستجو می‌شود در حالیکه بردار مانده بر زیرفضای AK_m عمود است.

قضیه آ-۲-۲. فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ باشد. $x_m \in x_0 + K_m$ جواب تقریبی حاصل از روش زیرفضای کرلیفی است که $L_m = AK_m$ می‌باشد اگر و تنها اگر

$$R(x_m) = \min_{x \in x_0 + K_m} R(x)$$

که $R(x) = \|b - Ax\|_p$ تعریف می‌شود.

□

برهان. برای اثبات به مرجع [۳۰] مراجعه کنید.

آ-۳-۳ روش‌های کاهش بنیادی^۱

در این بخش به تشریح روش‌های اساسی مورد استفاده در حل تکراری مسائل بهینه‌سازی نامقید پرداخته می‌شود، که در فصول آینده مورد استفاده قرار می‌گیرد. اهمیت این روش‌ها در پیاده‌سازی راحت و سرعت همگرایی است. این روش‌ها از مراجع کتاب لئونبرگر و بازار

آ-۳-۱ روش تندترین کاهش

یکی از قدیمی‌ترین و شناخته‌شده‌ترین روش‌ها برای مینیمم‌سازی تابع چند متغیره روش تندترین کاهش^۲ است که اغلب روش گرادین نامیده می‌شود. فرض کنید f دارای مشتقات جزئی پیوسته مرتبه اول در \mathbb{R}^n باشد، بردار گرادین f ، $\nabla f(x)$ به عنوان یک بردار سطری n بعدی تعریف می‌شود. برای راحتی کار بردار ستونی $g(x) = \nabla f(x)^T$ تعریف می‌شود که با g نمایش داده می‌شود. این روش برای توابع نامحدب به شرط اینکه مشتق‌پذیر باشند نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد.

^۱Basic descent methods

^۲Steepest descent

روش تندترین کاهش با الگوریتم تکراری زیر تعریف می‌شود:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k$$

که در آن اسکالر غیرمنفی است که $f(x_k - \alpha g_k)$ را مینیمم می‌کند. به عبارت دیگر از نقطه x_k در امتداد بردار گرادیان منفی $(-g_k)$ تا رسیدن به نقطه مینیممی بر روی آن به جستجو پرداخته می‌شود، x_{k+1} را نقطه مینیمم می‌گیرند.

اساساً تمامی خصوصیات همگرایی موضعی مهم روش تندترین کاهش با بررسی کاربرد این روش برای مسائل درجه دوم آشکار می‌شود. تابع

$$f(X) = -C^T X + \frac{1}{2} X^T H X \quad (3-آ)$$

که در آن H یک ماتریس معین مثبت $n \times n$ است. را در نظر بگیرید چون H معین مثبت است، تمامی مقادیر ویژه آن مثبت اند. فرض کنید این مقادیرهای ویژه به صورت $0 < a = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n = A$ مرتب شده باشند. از معین مثبت بودن H نتیجه می‌شود که تابع f اکیدا محدب است. نقطه مینیمم یکتای f را می‌توان با صفر قراردادن بردار گرادیان مستقیماً بدست آورد، بطوریکه x^* در رابطه $Hx^* = c$ صدق کند [۳۱].

آ-۳-۲ روش جهت‌های مزدوج

برای سرعت بخشیدن به همگرایی روش تندترین کاهش روش‌های جهت‌های مزدوج^۲ مطرح شدند [۳۱]. این روش‌ها برای مسئله درجه دوم، بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\min_x \frac{1}{2} x^T H x - c^T x$$

که در آن H یک ماتریس متقارن معین مثبت $n \times n$ است، ابداع شده و مورد تحلیل قرار گرفته است. برای یک ماتریس متقارن^۳ H بردارهای $d_1, \dots, d_j, \dots, d_n$ را H -متعامد، یا مزدوج نسبت به H گویند اگر

$$d_i^T H d_j = 0 \quad \text{that } i \neq j$$

^۱Eigenvalues ^۲Conjugate directions ^۳Symmetric matrix

در کاربردهای مورد نظر ما، ماتریس H معین مثبت است اما این فرض در تعریف اصلی منظور نشده است. روش گرادیان‌های مزدوج^۱ همان روش جهت‌های مزدوج است که با انتخاب بردارهای متوالی جهت بصورت نمونه‌ای مزدوج از گرادیان‌های متوالی به دست می‌آید. بنابراین جهت‌های مربوطه از قبل مشخص نمی‌شود بلکه در هر مرحله تکرار بطور متوالی تعیین می‌شوند. در مرحله K منفی بردار گرادیان مرحله جاری محاسبه می‌شود و یک ترکیب خطی از بردارهای جهت قبلی بدان اضافه می‌گردد تا جهت مزدوج جدیدی که حرکت در امتداد آن صورت می‌گیرد، بدست آید.

با انتخاب x_1 به عنوان نقطه شروع

$$X = x_1 + \sum_{j=1}^n \lambda_j d_j$$

$$C^T x_1 + \sum_{j=1}^n \lambda_j C^T d_j + \frac{1}{2} \left(x_1 + \sum_{j=1}^n \lambda_j d_j \right)^T H \left(x_1 + \sum_{j=1}^n \lambda_j d_j \right)$$

با در نظر گرفتن اینکه بردارهای d_1, \dots, d_n نسبت به H مزدوج هستند، معادله فوق بصورت مینیمم سازی زیر ساده می‌شود:

$$f(\lambda) = \sum_{j=1}^n [C^T(x_1 + \lambda_j d_j) + \frac{1}{2}(x_1 + \lambda_j d_j)^T H(x_1 + \lambda_j d_j)]$$

مشاهده می‌شود که F در $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ قابل تفکیک است، و با روش‌های مینیمم سازی مینیمم می‌شود. در حالت خاص، اگر H معین مثبت باشد، مقدار مینیمم λ_j^* با رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\lambda_j^* = - \frac{[C^T d_j + x_1^T H d_j]}{d_j^T H d_j}$$

مثال ۳-۱. مسئله زیر را در نظر بگیرید:

$$\min \quad -12x_2 + 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2$$

ماتریس هسین H بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

^۱Conjugate gradient

$$f(X) = C^T X + \frac{1}{\gamma} X^T H X = -12x_2 + 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2 + 0x_1$$

$$C^T = \begin{bmatrix} 0 & -12 \end{bmatrix} \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 0 \\ -12 \end{bmatrix}$$

$$F(X) = (0 \quad -12) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{\gamma} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

اکنون باید دو جهت مزدوج d_1 و d_2 تولید شوند. فرض کنید d_1 بصورت $d_1 = (1, 0)$ انتخاب شده است، آنگاه d_2 بصورت زیر محاسبه می شود:

$$d_i^T H d_j = 0 \quad \text{that } i \neq j$$

$$\begin{bmatrix} d_{21} \\ d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} (0 \quad -12) \\ -2d_{21} = d_{22}$$

در حالت خاص $d_{21} = 1$ And $d_{22} = -2$ انتخاب می شوند، آنگاه داریم:

$$d_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

آ-۳-۳ روش گرادیان مزدوج پیش شرط

روش گرادیان مزدوج یکی از بهترین و شناخته شده ترین روش ها برای حل سیستم خطی معین مثبت متقارن تُنک است. این روش یک تکنیک تصویری متعامد بر روی زیرفضای کرلیف $K_m = K_m(A, r_0)$ است که r_0 اولین باقی مانده است.

روش گرادیان مزدوج سیستم

$$Ax = b \quad (4-آ)$$

را که A یک ماتریس معین مثبت متقارن است را حل می کند.
در این روش بصورت بازگشتی زیر x^k محاسبه می شود:

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k g^k$$

باقی مانده بصورت زیر تعریف می شود:

$$r^k = b - Ax^k$$

و

$$f(y) = \frac{1}{2} y^T A y - y^T b$$

تعریف می شود.

قضیه آ-۳-۲. x جواب سیستم خطی آ-۴ است اگر و فقط اگر x نقطه مینیمم $f(y)$ باشد.

بنابراین هدف پیدا کردن نقطه مینیمم تابع f است با شروع از نقطه x . با توجه به جهت p^k, α_k را پیدا می کنیم که رابطه زیر را مینیمم کند

$$\phi(x^{k+1}) = \phi(x^k + \alpha_k p^k)$$

در اینصورت α_k بصورت زیر بدست می آید:

$$\alpha_k = \frac{p^{kT} r^k}{p^{kT} A p^k}$$

به x^k جواب بهینه گفته می شود با توجه به جهت $p \neq 0$ اگر رابطه زیر برقرار باشد

$$\phi(x^k) \leq \phi(x^k + \lambda p) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

قضیه آ-۳-۳. اگر x^k جواب بهینه با توجه به p باشد، آنگاه p بر r^k متعامد است.

برای جستجوی جهتی که بهینگی را در تکرار نگه دارد، فرض شده $x^{k+1} = x^k + q$ با x^k بهینه با توجه به

جهت p ($r^k \perp p$). با اعمال x^{k+1} بهینه با توجه به p ، $(r^{k+1} \perp p)$ رابطه زیر بدست می آید

$$p^T A q = 0$$

که با توجه به آن جهت ها A متعامد یا A مزدوج هستند که مطابق تعریف آ-۳-۲ حل می شوند.

قضیه آ-۳-۴. فرض کنید A ماتریس معین مثبت متقارن $n \times n$ باشد، روش گرادیان مزدوج برای سیستم $Ax = b$ در n مرحله همگرا می‌شود. علاوه بر این خطای e^k بر p^j برای $j = 0, 1, \dots, k-1$ عمود است، و

$$\|e^k\|_A \leq \frac{rc^k}{1+c^k} \|e^0\|_A \quad \text{where } c := \frac{\sqrt{\kappa_\gamma(A)}-1}{\sqrt{\kappa_\gamma(A)}+1}$$

برای همگرایی بهتر، $\kappa_\gamma(A)$ که $\kappa_\gamma(A) := \|A\|_\gamma \|A^{-1}\|_\gamma = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)}$ باید کوچک باشد. بنابراین اگر $\kappa_\gamma(A) \gg 1$ باشد، سیستم به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$P^{-\frac{1}{2}}AP^{-\frac{1}{2}}y = P^{-\frac{1}{2}}b \quad \text{with } y = P^{-\frac{1}{2}}x \quad \text{i.e. } P^{-\frac{1}{2}}Ax = P^{-\frac{1}{2}}b$$

و در نهایت روش گرادیان مزدوج پیش شرط بصورت زیر بدست می‌آید: با یک x^0 اولیه معین، r^0 را بصورت $r^0 = b - Ax^0$ بدست می‌آید، و $p^0 = z^0$ ، $z^0 = P^{-1}r^0$ با تکرار بر روی $k = 0, 1, \dots$ روابط زیر بدست می‌آید:

$$\alpha_k = \frac{p^{kT} r^k}{(Ap^k)^T p^k}$$

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k p^k$$

$$r^{k+1} = r^k - \alpha_k Ap^k$$

$$Pz^{k+1} = r^{k+1}$$

$$\beta_k = \frac{(Ap^k)^T z^{k+1}}{p^{kT} Ap^k}$$

$$p^{k+1} = z^{k+1} - \lambda_k p^k$$

آ-۴ گرادیان مزدوج حداقل مربعات^۱

فرض کنید که $A \in R^{n \times m}$ مسئله حداقل مربعات زیر را در نظر بگیرید [۳۲]:

$$\|b - Ax\|_\gamma = \min_{y \in R^m} \|b - Ay\|_\gamma \quad (5-\text{آ})$$

^۱Conjugate gradient least squares (CGLS)

این مسئله بصورت معادله نرمال زیر بازنویسی می شود:

$$A^T A x = A^T b \quad (6-آ)$$

ماتریس $A^T A$ ماتریس معین مثبت متقارن $n \times n$ است. بنابراین فرآیند حل معادله خطی با محاسبه مینیمم تابع درجه دوم زیر جایگزین می شود:

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A^T A x - (A^T b)^T x \quad (7-آ)$$

گرادیان $f(x)$ بصورت زیر نشان داده می شود:

$$g(x) = \nabla f(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]^T = A^T A x - A^T b \quad (8-آ)$$

با در نظر گرفتن بردار دلخواه غیرصفر $p \in R^n$ و عدد حقیقی t نتیجه گرفته می شود:

$$f(x + tp) - f(x) = t g(x)^T p + \frac{1}{2} t^2 p^T A^T A p \quad (9-آ)$$

اگر u رزولوشن فرمول 6-آ، و $g(u) = 0$. در نتیجه برای بردار دلخواه غیرصفر $p \in R^n$ منجر به زیر مسئله زیر می شود:

$$f(u + tp) - f(u) \begin{cases} > 0 & \text{when } t \neq 0 \\ = 0 & \text{when } t = 0 \end{cases} \quad (10-آ)$$

بنابراین u مینیمم تابع $f(x)$ است. به عبارت دیگر، به دلیل اینکه $A^T A$ معین مثبت است، در فضای R^n تابع درجه دوم $f(x)$ جواب مینیمم یکتا دارد.

بنابراین اگر u مینیمم تابع $f(x)$ باشد، آنگاه

$$f(u + tp) - f(u) = t g(u)^T p + \frac{1}{2} t^2 p^T A^T A p \quad (11-آ)$$

علاوه بر این

$$\left. \frac{df(u+tp)}{dt} \right|_{t=0} = g(u)^T p = 0 \quad (12-آ)$$

در رابطه ۱۲-آ نشان داده شد که معادله نرمال ۶-آ جواب یکتا دارد. علاوه بر این جواب از محاسبات تکراری استخراج می شود.

اگر دنباله‌ای از بردارهای $p^0, p^1, \dots, p^{k-1} \in R^n$ وجود داشته باشد، رابطه زیر را ایجاب می کند:

$$p^{(i)T} A^T A p^{(j)} = 0, \quad i \neq j \quad (13-آ)$$

ضمناً، دنباله بردارهای p^0, p^1, \dots, p^{n-1} در فضای R^n است. بردار معین $x^0 \in R^n$ ، بردار اولیه دلخواه است. $k = 0, 1, 2, \dots$ را در نظر بگیرید و x^k بعنوان نقطه شروع، در امتداد جهت مشخص شده p^k مینیمم تابع $f(x)$ در خط مستقیم؟ $x = x^k + tp^k$

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k p^k \quad (14-آ)$$

$$s^k = A^T (b - Ax^k), \quad \alpha_k = \frac{s^{(k)T} p^k}{p^{(k)T} A^T A p^k} \quad (15-آ)$$

که p^k نشان دهنده جهت جستجو است. به ویژه $p^0 = s^0$

$$p^{k+1} = s^{k+1} + \beta_k p^k, \quad \beta_k = -\frac{s^{(k+1)T} A^T A p^k}{p^{(k)T} A^T A p^k} \quad (16-آ)$$

تعریف ۴-۱ (روش های تصویری). در حالت کلی برای روش های تصویری (افکنش) ^۱ فرض کنید A ماتریس $n \times n$ است و κ و L دوزیرفضای m بعدی در \mathbb{R}^n هستند، یک روش تصویری (افکنش) بر زیرفضای κ و متعامد بر L فرآیندی است که تخمینی برای جواب \tilde{x} در معادله $Ax = b$ پیدا می کند، تحت این شرط که \tilde{x} متعلق به κ

^۱Projection

Require: $A \in R^{m \times n}$, $b \in R^m$. iterative stop threshold $tol > 0$.

// Initialize

- 1: $x^0 \in R^n$,
- 2: $r^0 = b - Ax^0, p^0 = s^0 = A^T r^0, \gamma_0 = \|s^0\|_2^2$
- 3: **for** $i = 0$ repeat following steps until satisfy convergent condition $r_k > tol$ **do**
- 4: $q^k = Ap^k, \alpha_k = \gamma_k / \|q^k\|_2^2$
- 5: $x^{k+1} = x^k + \alpha_k p^k; r^{k+1} = x^k - \alpha_k q^k$
- 6: $s^{k+1} = A^T r^{k+1}; \gamma_{k+1} = \|s^{k+1}\|_2^2$
- 7: $\beta_k = \gamma_{k+1} / \gamma_k; p^{k+1} = s^{k+1} + \beta_k p^k$
- 8: **end for**
- 9: **return** solution sequence x

و بردار باقی مانده جدید عمود بر L است، داریم:

$$\text{Find } \tilde{x} \in \kappa \quad \text{such that } b - A\tilde{x} \perp L. \quad (17-\tilde{A})$$

با این امید که با پیشروی مقدار اولیه x به جواب می‌رسد، تخمین جواب را در فضای آفین $x_0 + K$ بجای بردار تصویرش در فضای K جستجوی می‌کند. در نتیجه معادله آ-۱۷ بصورت زیر اصلاح می‌شود:

$$\text{Find } \tilde{x} \in x_0 + \kappa \quad \text{such that } b - A\tilde{x} \perp L. \quad (18-\tilde{A})$$

چنانچه $\delta = x_0 + \tilde{x}$ و بردار باقی مانده اولیه r_0 بصورت $r_0 = b - Ax_0$ تعریف شود، آنگاه در معادله آ-۱۸ روابط زیر جایگذاری می‌شوند:

$$b - (Ax_0 + \delta) \perp L$$

یا

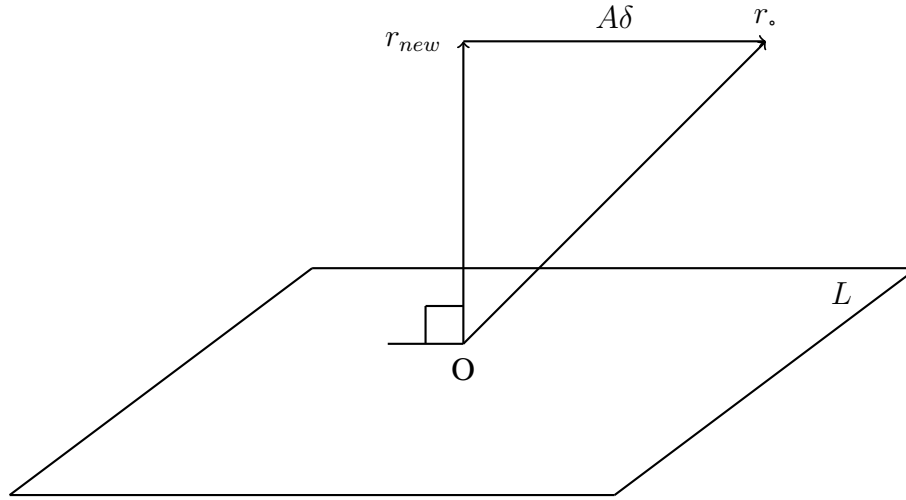
$$r_0 - A\delta \perp L$$

به عبارت دیگر تخمین جواب بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{x} = x_0 + \delta, \quad \delta \in \kappa, \quad (19-\tilde{A})$$

$$(r_* - A\delta, w) = 0, \quad \forall w \in L \quad (20-\bar{A})$$

شرایط تعامد رابطه آ-۲۰ مطرح شده روی باقی مانده جدید $r_{new} = r_* - A\delta$ در شکل آ-۴-۱ نشان داده شده



این گام در کلی ترین شکلش، مرحله افکنش اصلی است، استانداردترین تکنیک‌ها یک توالی از چنین افکنش‌هایی را بکار می‌برند. معمولاً مرحله افکنش جدید، یک جفت زیرفضای جدید K و L حدس اولیه x_0 برابر با آخرین تقریب بدست آمده از مرحله افکنش قبلی، را بکار می‌گیرد. [۳۰].

پیوست ب

برنامه‌های متلب

ب-۱ برنامه متلب مقایسه روش‌های MP,OMP,LS-OMP

برنامه ب-۱: مقایسه روش‌های MP,OMP,LS-OMP

```
===== ۱
In this program we demonstrate the MP, OMP, and LS-OMP ۲
algorithm, by running them on a set of test signals and checking ۳
wether they provide the desired outcome ۴
n=30; m=50; Smax=10; Exper=1000; ۵
A=randn(n,m); ۶
W=sqrt(diag(A'*A)); ۷
for k=1:1:m, ۸
    A(:,k)=A(:,k)/W(k); ۹
end; ۱۰
for S=1:1:Smax, ۱۱
    for experiment=1:1:Exper ۱۲
        % Generate a test signal of cardinality S ۱۳
        x=zeros(m,1); ۱۴
        pos=randperm(m); ۱۵
        x(pos(1:S))=sign(randn(S,1)).*(1+rand(S,1)); ۱۶
        b=A*x; ۱۷
        % Apply LS-MP ۱۸
        thrLSMP=1e-4; ۱۹
        r=b; ۲۰
        SS=[]; ۲۱
        while r'*r>thrLSMP, ۲۲
            Z=zeros(m,1); ۲۳
            for jj=1:1:m ۲۴
                % Apply LS-MP ۲۵
                Z=Z+(A(:,jj)*A(:,jj)')\A(:,jj)*r; ۲۶
            end ۲۷
            r=Z; ۲۸
        end ۲۹
```

SStemp=[SS,jj];	۳۰
rtemp=b-A(:,SStemp)*pinv(A(:,SStemp))*b;	۳۱
Z(jj)=rtemp'*rtemp;	۳۲
end;	۳۳
posZ=find(Z==min(Z),1);	۳۴
SS=sort([SS,posZ(1)]);	۳۵
r=b-A(:,SS)*pinv(A(:,SS))*b;	۳۶
end;	۳۷
xLSMP=zeros(m,1);	۳۸
xLSMP(SS)=pinv(A(:,SS))*b;	۳۹
<i>% Apply OMP</i>	۴۰
thrOMP=1e-4;	۴۱
r=b;	۴۲
SS=[];	۴۳
while r'*r>thrOMP,	۴۴
Z=abs(A'*r);	۴۵
posZ=find(Z==max(Z));	۴۶
SS=sort([SS,posZ(1)]);	۴۷
r=b-A(:,SS)*pinv(A(:,SS))*b;	۴۸
end;	۴۹
xOMP=zeros(m,1);	۵۰
xOMP(SS)=pinv(A(:,SS))*b;	۵۱
<i>% Apply MP</i>	۵۲
thrMP=1e-4;	۵۳
r=b;	۵۴
xMP=zeros(m,1);	۵۵
while r'*r>thrMP,	۵۶
Z=abs(A'*r);	۵۷
posZ=find(Z==max(Z),1);	۵۸
xMP(posZ)=xMP(posZ)+A(:,posZ)*r;	۵۹
r=r-A(:,posZ)*A(:,posZ)*r;	۶۰
end;	۶۱
end;	۶۲
end;	۶۳
end;	۶۴
end;	۶۵
end;	۶۶
end;	۶۷

ب-۲ برنامه متلب مقایسه روش‌های OMP,IRLS,BP

برنامه ب-۲: مقایسه روش‌های OMP,IRLS,BP

=====	۱
In this program we demonstrate the OMP, IRLS and BP	۲
algorithms, by running them on a set of test signals and checking	۳
wether they provide the desired outcome	۴
=====	۵
n=30; m=50; Smax=10; Exper=200;	۶
	۷
A=randn(n,m);	۸
W=sqrt(diag(A'*A));	۹


```

for k=1:1:m,
    A(:,k)=A(:,k)/W(k);
end;

OMPtime=0;
BPtime=0;
IRLStime=0;

for S=1:1:Smax,
    for experiment=1:1:Exper

        % Generate a test signal of cardinality S
        x=zeros(m,1);
        pos=randperm(m);
        x(pos(1:S))=sign(randn(S,1)).*(1+rand(S,1));
        b=A*x;

        % Apply OMP
        thrOMP=1e-4;
        tic;
        r=b;
        SS=[];
        while r'*r>thrOMP,
            Z=abs(A'*r);
            posZ=find(Z==max(Z));
            SS=sort([SS,posZ(1)]);
            r=b-A(:,SS)*pinv(A(:,SS))*b;
        end;
        xOMP=zeros(m,1);
        xOMP(SS)=pinv(A(:,SS))*b;
        OMPtime=OMPtime+double(toc);

        % Apply IRLS
        tic;
        xIRLS=ones(m,1); % initialization
        XX=eye(m);
        p=0.5; % refers to L1 (L0 is obtained by p=1)
        for k=1:1:100,
            XX2=XX*XX;
            xIRLS=XX2*A'*pinv(A*XX2*A')*b;
            XX=diag(abs(xIRLS).^p);
        end;
        SS=find(abs(xIRLS)>1e-4)';
        IRLStime=IRLStime+double(toc);

        % BP using L1 by Matlab
        V=ones(2*m,1);
        tic;
        xBP=linprog(V,[],[],[A,-A],b,0*V,V*100);
        xBP=xBP(1:m)-xBP(m+1:end);
        SS=find(abs(xBP)>1e-4)';
        BPtime=BPtime+double(toc);

    end;
end;

```

ب-۳ برنامه متلب روش SLO

برنامه ب-۳: روش SLO

```

SLO(A, b, sigma_min, sigma_decrease_factor, mu_0, L, A_pinv, true_x) ۱
                                                                    ۲
mu_0:                                                                    ۳
  The value of mu_0 scales the sequence of mu. For each vlue of ۴
  sigma, the value of mu is chosen via mu=mu_0*sigma^2. Note that ۵
  this
  value effects Convergence.                                                                    ۶
  The default value is mu_0=2 (see the paper).                                                                    ۷
                                                                    ۸
L:                                                                    ۹
  number of iterations of the internal (steepest ascent) loop. The ۱۰
  default value is L=3.                                                                    ۱۱
                                                                    ۱۲
A_pinv:                                                                    ۱۳
  is the pseudo-inverse of matrix A defined by A_pinv=A'*inv(A*A')۱۴
  If it is not provided, it will be calculated within the function.۱۵
  If
  you use this function for solving b(t)=Ax(t) for different values۱۶
  of
  't', it would be a good idea to calculate A_pinv outside the ۱۷
  function
  to prevent its re-calculation for each 't'.                                                                    ۱۸
                                                                    ۱۹
true_x:                                                                    ۲۰
  is the true value of the sparse solution. This argument is for ۲۱
  simulation purposes. If it is provided by the user, then the ۲۲
  function
  will calculate the SNR of the estimation for each value of sigma۲۳
  and
  it provides a progress report.                                                                    ۲۴
                                                                    ۲۵
Authors: Massoud Babaie-Zadeh and Hossein Mohimani                                                                    ۲۶
Version: 1.4                                                                    ۲۷
Last modified: 4 April 2010.                                                                    ۲۸
                                                                    ۲۹
x = A_pinv*b;                                                                    ۳۰
sigma = 2*max(abs(s));                                                                    ۳۱
                                                                    ۳۲
Main Loop                                                                    ۳۳
while sigma>sigma_min                                                                    ۳۴
  for i=1:L                                                                    ۳۵
    delta = OurDelta(s,sigma);                                                                    ۳۶
    x = x - mu_0*delta;                                                                    ۳۷
    x = x - A_pinv*(A*x-b); % Projection                                                                    ۳۸
  end                                                                    ۳۹
  if ShowProgress                                                                    ۴۰
    fprintf('      sigma=%f, SNR=%f\n',sigma,estimate_SNR(x,true_x))۴۱

```

```

end
sigma = sigma * sigma_decrease_factor;
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function delta=OurDelta(s,sigma)
delta = x.*exp(-abs(x).^2/sigma^2);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function SNR=estimate_SNR(estim_x,true_x)
err = true_x - estim_x;
SNR = 10*log10(sum(abs(true_x).^2)/sum(abs(err).^2));

```

ب-۴ برنامه متلب روش پیشنهادی BN

برنامه ب-۴: روش پیشنهادی BN

```

function xf = norm1MZ(A,b,eps)
Mehdi Zaferanieh
min ||x||1 s.t. ||Ax-b||1<=eps
m=3; n=2; eps=1; initial values
A=[1 2;3 1;4 5]; b=[3,0,10].'; %initial matrix and right hand side
values;
m = size(A,1);
n = size(A,2);
Bn=[eye(n),-eye(n)]; extreme directions for ||x||1;
Bm=[eye(m),-eye(m)]; extreme directions for ||Ax-b||1;
Aeqx=[eye(n),-Bn,zeros(n,2*m)]; Aeq corresponding to equality $x=\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$;
beqx=zeros(n,1); beq corresponding to equality $x=\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$;
Aeqc=[A,zeros(m,2*n),-Bm];
Aeq corresponding to equality $Ax-b=\sum_{i=1}^m \lambda'_i b'_i$;
beqc=b; beq corresponding to equality $Ax-b=\sum_{i=1}^m \lambda'_i b'_i$;
Aeq=[Aeqx;Aeqc]; The main Aeq corresponding to all constraints;
beq=[beqx;beqc]; The main right-hand-side values;
cx=zeros(1,n); The coefficient of variables x;
cli=ones(1,2*n); The coefficient of extreme directions for ||x||1;
clip=zeros(1,2*m); The coefficient of extreme directions for ||Ax-b||1;
lb=zeros(n+2*m+2*n,1); The lower bound for all variables;
f=[cx,cli,clip]; The main cost coefficient;
Ainq=[zeros(1,n),zeros(1,2*n),ones(1,2*m)]; %The constraint ||AX-b||1<=eps;
binq=[eps]; The given threshold
[xllp,fval] = linprog(f,Ainq,binq,Aeq,beq,lb,[]);
The initial obtained solution
for i=1:n
xf(i)=xllp(i);
end

```

$xf = xf'$;

۲۹

Hakim Sabzevari University
An Outline of MSc. Thesis



Surname:Hamed

Name:Razieh

Student No.:9313137042

Supervisor: Dr. Mehdi Zaferaniehi, Dr. Mahmood Amintoosi

Faculty of Mathematics and Computer Science

Program: Investigation of Various Norms In Sparse Representation

Title of thesis: Investigation of Various Norms In Sparse Representation

Keywords:sparse representation, sparse coding,block norm, matching pursuit, sparse approximation

Abstract: In recent years, sparse representation has found numerous applications as a suitable model for processing natural signals. Based on this method, any input signal can be represented using minimum number of basic vectors, which their number is generally much greater than their dimensionality. The most essential step in this model is finding an efficient algorithm to obtain sparsest representation possible. The most distinguishing feature of such algorithms is norm they use. Despite high speed of many algorithms applying norm zero, since it's not smooth, there's no guarantee for obtaining optimal result. Because of that, some other methods use closest convex norm to that, which is norm one. In this presentation, we propose a method using block norms to approximate norm one. Then we compare our proposed method with two basic sparse optimization algorithms. Experiments on artificial data in super-resolution imaging prove efficiency of the proposed method.



Hakim Sabzevari University

Faculty of Mathematics and Computer Science

**A Thesis Submitted in Partial Fulfilment of the Requirement for the
Degree of Master of Science in Investigation of Various Norms In
Sparse Representation**

Investigation of Various Norms In Sparse Representation

Supervisor:

Dr. Mehdi Zaferaniehi, Dr. Mahmood Amintoosi

By:

Razieh Hamedi

February 2017