بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه حکیم سبزواری

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی کاربردی
گرایش تحقیق در عملیات

حل مسئله مکان یابی هاب مسطح تک تخصیصی بدون ظرفیت با الگوریتم ژنتیک

استاد راهنما

دکتر محمود امین طوسی

استاد مشاور

دکتر مهدی زعفرانیه

پژوهشگر:

زهرا حسن زاده

شهریور ۱۳۹۷

باسمه تعالی

فرم ۱۱۳-ت

فرم ارزشیابی و صورتجلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد

جلسه دفاع از پایان‌نامه آقای /خانم **زهرا حسن زاده** دانشجوی رشته ریاضی کاربردی گرایش تحقیق در عملیات به شماره دانشجویی ۹۳۱۳۱۳۳۰۳۹ با عنوان:

حل مسئله مکان یابی هاب مسطح تک تخصیصی بدون ظرفیت با الگوریتم ژنتیک

در مورخه .... در دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر تشکیل و توسط هیات داوران مورد ارزشیابی قرار گرفت و نمره .... برابر درجه .... برای آن تعیین گردید .

به‌این ترتیب از این تاریخ آقای/ خانم زهرا حسن زاده به عنوان کارشناس ارشد در رشته مذکور شناخته می‌شود .

موارد ارزشیابی	موارد	حداکثر نمره	نمره کسب شده
۱- کیفیت نگارش	رعایت اصول نگارش انسجام در تنظیم بخشهای مختلف ،کیفیت تصاویر ، جداول و اشکال ،تنظیم فهرست ها ، منابع و ماخذ	٤	
۲- کیفیت علمی	بررسی تاریخچه و سابقه تجربی و نظری موضوع انسجام منطقی دربخش های مختلف پایان نامه ،ابتکار و نوآوری ،اهمیت و ارزش علمی پایان نامه ،استفاده از منابع معتبر و جدید ،کیفیت تجزیه و تحلیل یافته ها و نتیجه گیری ،روشن بودن روش کار ،هدف ها و فرضیه های تحقیق ،جدید بودن روش تحقیق	۱۰	
۳-کیفیت ارایه در جلسه دفاع	تسلط بر موضوع و بیان واضح وتفهیم آن ،توانایی در پاسخگویی به سوالات مطرح شده در جلسه ، رعایت زمان ارایه , روش ارائه	٤	
٤-ارزشیابی گزارشات	گزارش های دوره ای پیشرفت کار(حداقل ٤مورد)	۱	
٥- خروجی پایان نامه	مقاله مستخرج از پایان نامه: این نمره به صورت زیر اختصاص می یابد ۱) چکیده کنفرانسی هر مورد ۰/۲۵نمره تا سقف۰/۵ نمره ۲) مقاله کامل در مجموع مقالات همایشهای معتبر یا مقاله در مجلات علمی-ترویجی معتبر پذیرفته شده یا چاپ شده هر مورد ۰/۵ نمره تا سقف ۱نمره ۳)مقاله پذیرفته شده یا چاپ شده در مجلات علمی پژوهشی معتبر ۱ نمره ٤)مقاله ارسال شدهبه مجلات علمی پژوهشی معتبرهر مورد ۲۵/. نمره تا سقف ۰/۵ نمره ٥) دستگاه ساخته شده دارای گواهی ثبت اختراع یا به سفارش سازمان ها تا سقف ۱ نمره ٦) دستگاه ساخته شده کاربردی که به تایید رئیس دانشکده رسیده باشد تا سقف ۰/۵ نمره	۱	
جمع			

درجه معادل کسب شده: (از ۱۹تا ۲۰ عالی☐ از۱۸تا ۱۸/۹۹بسیارخوب ☐ از ۱٦تا ۱۷/۹۹خوب ☐ از ١٤ تا ۱٥/۹۹قابل قبول☐ کمتر از ١٤ غیر قابل قبول☐)

مشخصات هیات دوران

ردیف	نام و نام خانوادگی	سمت	مرتبه علمی	محل کار	امضا
۱	دکتر محمود امین طوسی	استاد راهنما	استادیار	دانشگاه حکیم سبزواری	
۲	دکتر مهدی زعفرانیه	استاد مشاور	استادیار	دانشگاه حکیم سبزواری	
۳	دکتر علی‌اصغر مولوی	استاد داور	استادیار	دانشگاه حکیم سبزواری	
۴	دکتر غلامرضا مقدسی	نماینده تحصیلات تکمیلی	استادیار	دانشگاه حکیم سبزواری	

امضا

مدیر گروه

امضا

رئیس دانشکده

سوگند نامه دانش آموختگان دانشگاه حکیم سبزواری

به نام خداوند جان و خرد   کزین برتر اندیشه بر نگذرد

اینک که به خواست آفریدگار پاک، کوشش خویش و بهره گیری از دانش استادان و سرمایه‌های مادی و معنوی این مرز و بوم، توشه‌ای از دانش و خرد گردآورده‌ام، در پیشگاه خداوند بزرگ سوگند یاد می‌کنم که در به کارگیری دانش خویش، همواره بر راه راست ودرست گام بردارم. خداوند بزرگ، شما شاهدان، دانشجویان و دیگر حاضران را به عنوان داورانی امین گواه می گیرم که ازهمه دانش و توان خود برای گسترش مرزهای دانش بهره گیرم و از هیچ کوششی برای تبدیل جهان به جایی بهتر برای زیستن، دریغ نورزم. پیمان می‌بندم که همواره کرامت انسانی را در نظر داشته باشم و همنوعان خود را در هر زمان و مکان تا سر حد امکان یاری دهم. سوگند می خورم که در به کارگیری دانش خویش به کاری که با راه و رسم انسانی، آیین پرهیزگاری، شرافت و اصول اخلاقی برخاسته از ادیان بزرگ الهی، به ویژه دین مبین اسلام، مباینت دارد دست نیازم. همچنین در سایه اصول جهان شمول انسانی و اسلامی، پیمان می‌بندم از هیچ کوششی برای آبادانی و سرافرازی میهن و هم میهنانم فروگذاری نکنم و خداوند بزرگ را به یاری طلبم تا همواره در پیشگاه او و در برابر وجدان بیدار خویش و ملت سرافراز، بر این پیمان تا ابد استوار بمانم.

نام و نام خانوادگی: زهرا حسن زاده

تاریخ و امضا:

تأییدیه‌ی صحت و اصالت نتایج

باسمه تعالی

اینجانب زهرا حسن زاده به شماره دانشجویی ۹۳۱۳۱۳۳۰۳۹ دانشجوی رشته ریاضی کاربردی مقطع تحصیلی کارشناسی ارشد تأیید می‌نمایم که کلیه‌ی نتایج این پایان‌نامه حاصل کار اینجانب و بدون هرگونه دخل و تصرف است و موارد نسخه برداری شده از آثار دیگران را با ذکر کامل مشخصات منبع ذکر کرده‌ام. درصورت اثبات خلاف مندرجات فوق، به تشخیص دانشگاه مطابق با ضوابط و مقررات حاکم (قانون حمایت از حقوق مؤلفان و مصنفان و قانون ترجمه و تکثیر کتب و نشریات و آثار صوتی، ضوابط و مقررات آموزشی، پژوهشی و انضباطی ...) با اینجانب رفتار خواهد شد و حق هرگونه اعتراض درخصوص احقاق حقوق مکتسب و تشخیص و تعیین تخلف و مجازات را از خویش سلب می‌نمایم. در ضمن، مسؤولیت هرگونه پاسخگویی به اشخاص اعم از حقیقی و حقوقی و مراجع ذی صلاح (اعم از اداری و قضایی) به عهده ی اینجانب خواهد بود و دانشگاه هیچ گونه مسؤولیتی در این خصوص نخواهد داشت.

نام و نام خانوادگی: زهرا حسن زاده

تاریخ و امضا:

مجوز بهره برداری از پایان‌نامه

بهره برداری از این پایان‌نامه در چهارچوب مقررات کتابخانه و با توجه به محدودیتی که توسط استاد راهنما به شرح زیر تعیین می‌شود، بلامانع است:

□ بهره برداری از این پایان‌نامه برای همگان بلامانع است.

□ بهره برداری از این پایان‌نامه با اخذ مجوز از استاد راهنما، بلامانع است.

□ بهره برداری از این پایان‌نامه تا تاریخ .... ممنوع است.

استاد راهنما: دکتر محمود امین طوسی

تاریخ و امضا:

تقدیم به:

همسر و فرزندم

و

پدر و مادرم

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.
در آغاز وظیفه خود می دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر محمود امین طوسی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی رسید.
از جناب آقای دکتر مهدی زعفرانیه که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.
همچنین لازم می دانم از گروه پارسی‌لاتک در پاسخگویی به مشکلات کاربران کمال قدردانی را داشته باشم.
در پایان، بوسه می زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس شان را و تشکر می‌کنم از خانواده عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که بهترین پشتیبان من بودند.

زهرا حسن زاده
شهریور ۱۳۹۷

فهرست مطالب

فهرست جداول

فهرست تصاویر

دانشگاه حکیم سبزواری

فرم چکیده ی پایان‌نامه ی دوره ی تحصیلات تکمیلی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

نام خانوادگی دانشجو:حسن زاده	نام:زهرا	ش. دانشجویی:۹۳۱۳۱۳۳۰۳۹

استاد راهنما: دکتر محمود امین طوسی

استاد مشاور: دکتر مهدی زعفرانیه

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر	رشته: ریاضی کاربردی	گرایش: تحقیق در عملیات
مقطع: کارشناسی ارشد	تاریخ دفاع:شهریور ۱۳۹۷	تعداد صفحات: ۷۷

عنوان پایان‌نامه: حل مسئله مکان یابی هاب مسطح تک تخصیصی بدون ظرفیت با الگوریتم ژنتیک

کلید واژه‌ها:الگوریتم ژنتیک، مسئله مکان یابی هاب، مسئله مکان یابی هاب پلانار

چکیده: مسئله مکان یابی هاب مکان هاب ها و اختصاص اسپوک ها به هاب ها را تعیین می کند به طوری که هزینه حمل و نقل کل به حداقل برسد. در این پایان نامه ما با مساله مکان یابی هاب مسطح تخصیص واحد بدون ظرفیت سروکار داریم. د راین مساله، همه جریان بین جفت اسپوک ها از طریق هاب ها عبور می کند، ظرفیت هاب ها نامحدود است و هاب ها می توانند در هر جایی قرار بگیرند و همه هاب ها کاملا به هم متصل هستند و هر اسپوک تنها به یک هاب اختصاص داده می شود.

پیش گفتار

مسئله های مکان یابی هاب روی یک شبکه تعریف می شوند به طوری که n نقطه به نام اسپوک ها و p مرکز حمل و نقل به نام هاب ها وجود دارد. شبکه مکان یابی هاب برای اولین بار توسط گلدمن در سال ۱۹۶۹ تعریف شده است [۱] . از آنجا که شبکه های هاب اسپوک کاربرد های عملی در صنایع مختلف دارند، مسئله مکان یابی هاب به طور گسترده ای توسط محققان مورد مطالعه قرار گرفته است. در مسئله مکان یابی هاب اگر هاب ها روی نقاط از پیش مشخص شده قرار بگیرند، بعضی از نقاط مبدا و مقصد، این نوع مسئله، مسئله مکان یابی گسسته نامیده می شود. اما اگر مکان هاب ها محدود نباشند و بتوان آن ها را در هر جایی از سطح قرار داد این نوع مسئله، مسئله مکان یابی هاب مسطح نامیده می شود. بسیاری از مقاله ها در این زمینه بر روی حل مسئله های گسسته تمرکز می کنند و تنها چند مقاله برای مسئله های پلانار وجود دارد. اکلی مکان یابی هاب مسطح را با روش مبنی بر خوشه بندی حل نمود [۱۷] و مثال هایی با بالای ۵۰۰ گره و ۹ هاب را حل کرد.

این پایان نامه شامل ۳ فصل است: در فصل ۱ تعاریف، مفاهیم مورد نیاز مسئله های مکان یابی هاب و ویژگی های آن مطرح خواهد شد. در فصل ۲ مدل ریاضی مسئله مکان یابی هاب را بیان می کنیم. در فصل ۳ یک رویکرد خوشه بندی به مسئله مکان یابی هاب مسطح را بیان می کنیم.

مطالب این پایان نامه برگرفته از مقالات زیر می باشد:

1. Haluk Damgacioglun, Derya Dinler, Nur Evin Ozdemirel, Cem Iyigun. A genetic algorithm for the uncapacitated single allocation planar hub location problem. *Computers Operations Research*, 62 (2015) 224-236.

2. O'Kelly ME., clustering approach to the planar hub location problem. *Annals of Operations Research*, 40(1992)339-353.

3. James F., Campbell. Integer programming formulations of discrete hub location problems. *European Journal of Operational Research*, 72 (1994) 387-405.

4. E. Weiszfeld, Frank Plastria. On the point for which the sum of the distances to n given points is minimum. *Ann Oper Res*, 167(2009): 7–41.

فصل ۱

کلیات تحقیق

۱-۱ مقدمه

یکی از مباحث جدیدی که در حوزه ی مسائل مکان یابی مطرح شده است، مساله مکان یابی هاب می باشد. اگر مجموعه ای از n نقطه در حال تعامل در یک شبکه داده شده باشد، مسئله مکان یابی هاب ، مکان هاب ها و اختصاص اسپوک ها به هاب ها را طوری تعیین می کند که هزینه حمل و نقل کل به حداقل برسد.

در این پایان نامه به مسئله مکان یابی هاب مسطح تک تخصیصی بدون محدودیت ظرفیت $(PHLP)$ [۲] پرداخته خواهد شد. انگیزه اصلی مطالعه PHLP به سه دلیل است:

- اول از همه، PHLP یک مسئله چالش برانگیز ریاضی است زیرا تابع هدف مشتق پذیر نیست، که برای بهینه سازی آسان نیست.
- دوما PHLP در بسیاری از مسئله های دنیای واقعی می تواند مفید باشد، در جائی که مکان ها می توانند در فضای پیوسته گذاشته شوند. مانند: ارتش شهر، سیستم ارسال کالا. برای مثال، یک مرکز حمل یا ارسال کالا در یک شهر تقریبا در هر جایی می تواند قرار گیرد.
- سوما، PHLP به پارامتر های مسئله (مقدار و هزینه جریان) بسیار حساس تر از DHLP [۳] است، و جواب های PHLP ممکن است آگاهی ارزشمندی برای انتخاب مکان هاب ها در DHLP فراهم سازد.

---

[۲] uncapacitated single allocation Planar hub location problem [۳] discrete hub location problem

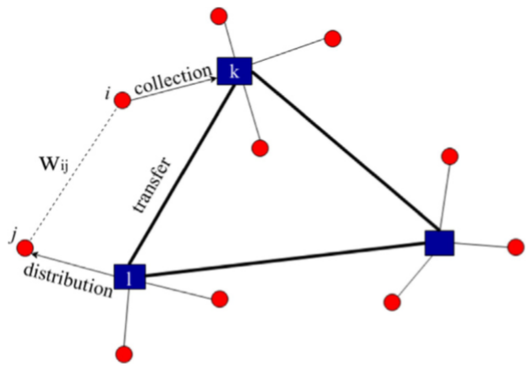
۲-۱ تعریف مساله

تعریف ۱-۲-۱. هاب عبارت است از مراکز جمع آوری و توزیع که به جای ارتباط مستقیم میان دو نقطه، با هدف اتصالات کمتر و غیر مستقیم و کاهش هزینه ها مورد استفاده قرار می گیرد.

مساله مکان یابی هاب به تعیین مکان هاب ها و تخصیص گره های مبدا و مقصد به هاب ها می پردازد به طوری که مجموع هزینه های مستقر ساختن هاب ها و هزینه های حمل و نقل کمینه شود. مساله های مکان یابی هاب (HLPs) روی یک شبکه تعریف می شوند، به طوری که n نقطه تعامل به نام اسپوک ها و p مرکز حمل و نقل به نام هاب ها وجود دارد. طراحی شبکه در بسیاری از مسائل حمل و نقل و ارتباطات موضوع مهم و اصلی است، زیرا تاثیر زیادی بر روی کارایی و هزینه اقتصادی نهایی سرویس دارد. در مواردی ارتباط مستقیم بین گره های غیر هاب بسیار گران است و بهتر است کالا ها از گره های دیگری که هاب نامیده می شوند حرکت کنند. به همین دلیل به جای استفاده از اتصالات مستقیم مبدا به مقصد، اتصالات غیر مستقیم (اتصالات به هاب) به کا گرفته می شود. هاب ها امکاناتی هستند که به عنوان نقاط تعویض و انتقال در شبکه های حمل و نقل و ارتباطات با تعداد زیادی مبدا و مقصد خدمت می کنند. شبکه های هاب جریان ها را روی اتصال های هاب به هاب متمرکز می کنند و از مقادیر اقتصادی در حمل و نقل میان محور بهره مند می شوند. در یک شبکه مکان یابی هاب سه نوع اتصال وجود دارد که عبارتند از :

- مجموعه اتصال های از اسپوک ها (نقاط مبدا) به هاب ها
- اتصال های انتقال درون هابی بین دو جفت هاب
- اتصال های توزیع از هاب ها به اسپوک ها(نقاط مقصد)

یک نمونه شبکه مکان یابی هاب در شکل ۱-۱ نشان داده شده است که گره های i و j نشان دهنده اسپوک ها و گره های K و L هاب ها هستند. در یک شبکه مکان یابی هاب، عرضه از تعدادی نقاط مبدا در یک هاب جمع می شود، به هاب دیگری منتقل می شود و سپس به نقاط تقاضا توزیع می شود.



شکل ۱-۱: مثالی از شبکه مکان یابی هاب تک تخصیصی

۱-۳ کاربرد مساله مکان یابی هاب در دنیای واقعی

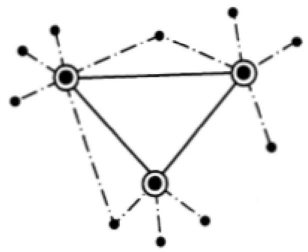
شبکه های هاب اسپوک کاربرد های عملی در صنایع مختلف دارند، به همین دلیل مسئله مکان یابی هاب به طور گسترده ای توسط محققان مورد مطالعه قرار گرفته است. شبکه های هاب اسپوک در صنایع مختلف مانند : مسافرت و حمل و نقل هوایی ، حمل و نقل زمینی ،تحویل محموله های پستی ،شبکه های کامپیوتری و مخابراتی استفاده می شود. به عنوان مثال از کامیون بزرگتر بین هاب ها استفاده می شود و همچنین هزینه حمل و نقل کالا در کالا های دریایی کاهش می یابد. در صنعت خطوط هوایی و شبکه های ارتباط از راه دور استفاده از هاب ها نیاز به همه اتصال های دو به دو بین اسپوک ها را از بین می برد، و به طور قابل ملاحظه ای هزینه ها را کاهش می دهد.

۱-۴ انواع مسائل مکانیابی هاب از نظر تخصیص دهی

۱. **تخصیص دهی تکی:** در تخصیص دهی تکی، هر اسپوک (مبدا و مقصد) فقط می تواند به یک هاب متصل شود. در این تخصیص دهی امکان اتصال یک مبدا یا مقصد به چندین هاب وجود ندارد (شکل ۱-۲).

شکل ۱-۲: نمایی کامل از شبکه هاب تک تخصیصی

۲. **تخصیص دهی چند گانه:** در تخصیص دهی چند گانه امکان تخصیص دهی به چندین هاب ممکن است و هر مبدا و مقصد می توانند به چندین هاب جریان بفرستندو یا از آنها جریان دریافت کنند (شکل ۱-۳).



شکل ۱-۳: نمایی کامل از شبکه هاب چند تخصیصی

۱-۵ انواع مسائل مکانیابی از نظر مکان هاب

۱. **مسئله مکان یابی گسسته:** در این نوع مسئله مکان یابی، هاب ها می توانند روی نقاط از قبل مشخص شده قرار بگیرند، معمولا بعضی از نقاط مبدا و مقصد. به این نوع مسئله، مسئله مکان یابی گسسته می گویند (DHLP) . چهار مساله اساسی در نظریه تحلیل مکان یابی هاب گسسته وجود دارند که عبارتند از:

- **مساله p هاب میانه یا PHMP** [1] : مساله p هاب میانه برای شبکه های حمل ونقل و مخابراتی کاربردی است که در آن هدف مینیمم کردن هزینه کلی حرکت است. توسعه اخیر شبکه های مسافری و حمل و نقل هوایی مبنی بر هاب تنها یک نمونه از اهمیت این مساله است. در این مساله تمام هاب ها به طور کامل بهم متصل هستند و گره های غیر هاب ممکن است به صورت یگانه یا چند گانه به هاب ها اختصاص داده شوند. در این مساله هاب ها بی ظرفیت هستند و تعداد کل هاب ها (P) از پیش تعیین شده است. متغیر ها و پارامتر هایی که در این مدل استفاده شده اند عبارتند از:

[1] p-hub median problem

X_{ij}^{km} کسری از جریان که از مکان (مبدا) i به مکان (مقصد) j از طریق هاب هایی که در مکان k و m قرار داده شده اند، فرستاده می شود.

y_k برابر یک است اگر گره k یک هاب باشد و در غیر اینصورت برابر صفر است.

w_{ij} مقدار جریان بین گره های i و j.

C_{ij} هزینه انتقال یک واحد جریان از گره i به گره j.

Z_{ik} برابر یک است اگر گره i به هاب k تخصیص داده شده باشد و در غیر اینصورت برابر صفر است.

$C_{ij}^{km} = c_{ik} + c_{mj} + \alpha c_{km}$

متغیر های تصمیم X_{ij}^{km} و Z_{ik} تخصیص را بیان می کنند و متغیر تصمیم y_k مکان هاب ها را نشان می دهد. معمولا C_{ij} متناسب با فاصله بین i و j است. C_{ij}^{km} هزینه انتقال هر واحد جریان از مبدا i به مقصد j بوسیله هاب هایی که در مکان k و m قرار داده شده اند. در این قسمت اندیس های i و j به عنوان اندیس های مبدا و m و k به عنوان اندیس های هاب ها استفاده می شود.

مدل ریاضی مسئله مکان یابی $p-$هاب میانه توسط کمپبل [۲۱] به صورت زیر ارائه شده است:

$$\min \quad \sum_i \sum_j \sum_k \sum_m W_{ij} X_{ij}^{km} C_{ij}^{km}$$

$$s.t. \quad \sum_k Y_k = p \tag{۱-۱}$$

$$0 \leq Y_k \leq 1 \quad \text{and integer for all k} \tag{۱-۲}$$

$$0 \leq X_{ij}^{km} \leq 1 \quad \text{for all i,j,k,m} \tag{۱-۳}$$

$$\sum_k \sum_m X_{ij}^{km} = 1 \quad \text{for all i,j} \tag{۱-۴}$$

$$X_{ij}^{km} \leq Y_k \quad \text{for all i,j,k,m} \tag{۱-۵}$$

$$X_{ij}^{km} \leq Y_m \quad \text{for all i,j,k,m} \tag{۱-۶}$$

تابع هدف در این مسئله مجموع هزینه های حمل و نقل برای همه جفت گره های مبدا - مقصد است که باید مینیمم شود. محدودیت (۱-۱) تعیین می کند که دقیقا p هاب وجود دارد. محدودیت (۱-۲) نشان می دهد که مقدار Y_k برابر صفر و یا یک است. محدودیت (۱-۳) گستره متغیر X را محدود می کند. محدودیت (۱-۴) اطمینان می دهد که جریان برای هر جفت مبدا و مقصد از طریق برخی جفت هاب ها فرستاده می شود. محدودیت های

(۱-۵) و (۱-۶) اطمینان می دهند که تقاضا از مبدا i به مقصد j نمی توانند به جفت هاب k وm تخصیص یابند مگر اینکه هر دو گره ی k و m به عنوان هاب در نظر گرفته شوند.

- **مساله مکان یابی هاب بدون ظرفیت** [۱] : مساله مکان یابی هاب بدون ظرفیت از مساله p هاب میانه متفاوت است به طوری که در آن تعداد هاب ها مشخص نیست و یک هزینه ثابت نامنفی... این مساله مشابه مساله مکان یابی تسهیلات بدون ظرفیت [۲] است.
مسئله مکان یابی هاب بدون ظرفیت به صورت زیر فرمول بندی شده است:

$$\min \quad \sum_i \sum_j \sum_k \sum_m C_{ij}^{km} W_{ij} X_{ij}^{km} + \sum_k F_k Y_k$$

$$s.t. \quad ۰ \leq Y_k \leq ۱ \quad \text{and integer for all k} \quad (۱-۷)$$

$$۰ \leq X_{ij}^{km} \leq ۱ \quad \text{for all i,j,k,m} \quad (۱-۸)$$

$$\sum_k \sum_m X_{ij}^{km} = ۱ \quad \text{for all i, j} \quad (۱-۹)$$

$$X_{ij}^{km} \leq Y_m \quad \text{for all i, j, k, m} \quad (۱-۱۰)$$

$$X_{ij}^{km} \leq Y_k \quad \text{for all i,j,k,m} \quad (۱-۱۱)$$

که F_k هزینه ثابت مستقر کردن یک تسهیلات در مکان k است.
محدودیت ها همانند مسئله $P-$میانه هستند، جز اینکه تعداد هاب ها داده نشده است.
زمانی که ظرفیت هاب ها کران دار شده باشد مسئله مکان یابی هاب ظرفیت دار نتیجه می شود. اگر فرض شود که ظرفیت هاب در مکان k، Γ_k باشد، با اضافه کردن محدودیت زیر به مدل $UHLP$ آنگاه مدل مکان یابی هاب ظرفیت دار نتیجه می شود.

$$\sum_i \sum_j W_{ij} \left[\sum_m (x_{ij}^{km} + x_{ij}^{mk}) - x_{ij}^{kk} \right] \leq \Gamma_k Y_k \qquad \text{for all k}$$

[۱] uncapacitated hub location problem [۲] uncapacitated facility location problem

- **مساله p-هاب مرکزی** [1] : مساله های مرکزی حداقل سازی حداکثر ($MinMax$) اساسا از مساله های مکان یابی تسهیلات بدون ظرفیت ($UFLP$) و مکان یابی تسهیلات میانه که حداقل سازی مجموع ($MinSum$) هستند متفاوت است. مساله های مرکزی از هر دوی این مسائل به دلیل کاربردشان، مانند قرار دادن تسهیلات و وسایل نقلیه اضطراری، و ... اهمیت دارد. مساله P هاب مرکزی مشابه با مساله P مرکزی است. کمپل اولین کسی بود که بحث یر روی مسئله $p-$هاب مرکز را مطرح کرد و آن را فرموله کرد. او سه نوع مختلف از مسئله $p-$هاب مرکز را مطرح نمود که در ادامه به آن پرداخته شده است. نوع اول هاب مرکزی یک مجموعه از هاب ها هستند که حداکثر هزینه برای هر جفت مبدا به مقصد را به حداقل برساند. این نوع از هاب مرکز برای یک سیستم هاب که شامل کالاهای فاسد شدنی(مواد غذایی، گل ها، دارویی و مواد شیمیایی و ...) که به زمان حساس هستند استفاده می شود. در این مسائل زمان حکم هزینه را دارد.

در یک مسیر مبدا به مقصد اگر هر یک از اتصال ها به طور مجزا مورد بررسی قرار بگیرند نوع دوم از هاب مرکز بوجود می آید. یک مسیر مبدا به مقصد حداکثر سه اتصال دارد که عبارتند از: مبدا به هاب، هاب به هاب و هاب به مقصد. این نوع از هاب مرکز یک مجموعه از هاب هایی است که ماکزیمم هزینه برای حرکت روی هر اتصال را به حداقل برساند. این نوع از هاب مرکزی در سیستم های حمل و نقل که هزینه به زمان وابسته است و حداکثر زمان برای هر یک از اتصال ها مهم است، مورد توجه است. به عنوان مثال، مواردی است که بعضی از روش های نگهداری مانند فاسد شدن و یا تازه سازی را نیاز دارند، مانند گرم یا سرد کردن، که تنها در مکان هاب ها در دسترس است. کاربرد دیگر برای رانندگان وسایل نقلیه یا خلبان هاست که محدودیت زمانی را برای خدمات پیوسته دارند، بنابراین طول هر اتصال مهم است. نوع سوم هاب مرکز بدین صورت است که حداکثر هزینه برای جابجایی بین هاب و یک مبدا یا مقصد را به حداقل برساند.

[1] p-hub center problem

مسئله $p-$هاب مرکز (نوع اول) به صورت زیر فرمول بندی شده است:

$$
\begin{array}{lll}
\min & \max\limits_{i,j,k,m} \left\{ X_{ij}^{km} C_{ij}^{km} \right\} & \\
s.t. & \sum\limits_{k} Y_k = P & (۱۲-۱) \\
& ۰ \le Y_k \le ۱ \quad \text{and integer for all k} & (۱۳-۱) \\
& \sum\limits_{k} \sum\limits_{m} X_{ij}^{km} = ۱ \quad \text{for all i,j} & (۱۴-۱) \\
& X_{ij}^{km} \le Y_k \quad \text{for all i,j,k,m} & (۱۵-۱) \\
& X_{ij}^{km} \le Y_m \quad \text{for all i,j,k,m} & (۱۶-۱) \\
& ۰ \le X_{ij}^{km} \le ۱ \quad \text{and integer for all i,j,k,m} & (۱۷-۱)
\end{array}
$$

محدودیت ها تقریبا مشابه با محدودیت های مسئله $p-$ هاب میانه هستند. اما از آنجایی که X_{ij}^{km} باید صحیح باشد، محدودیت (۱-۲۳) جایگزین محدودیت (۱-۳) شده است. واضح است اگر $\alpha = ۰$ آنگاه نوع سوم از مسئله $p-$هاب مرکز به وجود نمی آید، زیرا اگر $\alpha = ۰$ آنگاه هزینه C_{ij}^{km} برابر مجموع هزینه های از مبدا i به هاب k و از هاب m به مقصد j خواهد بود.

نوع دوم مسئله $p-$هاب مرکز بدین صورت مدل بندی شده است:

$$
\begin{array}{lll}
\min & \max\limits_{i,j,k,m} \left\{ \max(c_{ik}, c_{mj}, \alpha c_{km}) X_{ij}^{km} \right\} & \\
s.t. & \sum\limits_{k} Y_k = P & (۱۸-۱) \\
& ۰ \le Y_k \le ۱ \quad \text{and integer for all k} & (۱۹-۱) \\
& \sum\limits_{k} \sum\limits_{m} X_{ij}^{km} = ۱ \quad \text{for all i,j} & (۲۰-۱) \\
& X_{ij}^{km} \le Y_k \quad \text{for all i,j,k,m} & (۲۱-۱) \\
& X_{ij}^{km} \le Y_m \quad \text{for all i,j,k,m} & (۲۲-۱) \\
& ۰ \le X_{ij}^{km} \le ۱ \quad \text{and integer for all i,j,k,m} & (۲۳-۱)
\end{array}
$$

محدودیت ها مشابه مسئله نوع اول است. واضح است که اگر $\alpha = ۰$ آنگاه نوع دوم مسئله $p-$هاب مرکز مشابه نوع سوم ازمساله خواهد بود.

- **مساله پوشش هاب :** [1] مسئله پوششی یک رابطه معکوس با مسئله مرکزی دارد. همانطور که در قسمت قبلی دیدیم برداشت از یک هاب مرکز چندین تفسیر داشت، برداشت از پوششی هاب هم چندین تفسیر دارد.

در تعریف نوع اول پوشش داریم که جفت مبدا به مقصد (i,j) با هاب های k و m پوشیده شده است اگر هزینه از i به j از طریق k و m از مقداری که معین شده است بیشتر نباشد. یعنی

$$C_{ij}^{km} \leq \gamma_{ij}$$

که γ_{ij} ماکزیمم هزینه داده شده برای جفت مبدا به مقصد (i,j) است.

نوع دوم پوشش بدین صورت تعریف می شود که جفت مبدا به مقصد (i,j) توسط هاب های k و m پوشیده شده است اگر هزینه هر اتصال در مسیر از i به j از طریق k و m از مقداری که معین شده است بیشتر نباشد. یعنی

$$\max\{C_{ik}, C_{mj}, \alpha C_{km}\} \leq \gamma_{ij}$$

نوع سوم از پوشش بدین صورت تعریف می شود که جفت مبدا به مقصد (i,j) توسط هاب های k و m پوشیده شده است اگر برای هر یک از اتصال های هاب به مقصد و مبدا به هاب رابطه های زیر برقرار باشد.

$$C_{ik} \leq \gamma_i \qquad \text{and} \qquad C_{mj} \leq \gamma_j$$

این سه نوع از پوشش مشابه با سه نوع از هاب مرکزی است که در قسمت قبلی توضیح داده شد.

برای فرمول بندی مسئله پوشش هاب، متغییر V_{ij}^{km} بدین صورت تعریف شده است که اگر هاب k و m جفت مبدا و مقصد (i,j) را بپوشاند، مقدار آن برابر یک است و در غیر اینصورت برابر صفر است. که این مفهوم پوشش بستگی به مسئله دارد.

[1] hub covering problem

هدف مسئله پوشش هاب، قرار دادن هاب ها برای پوشش همه تقاضا ها است بطوری که هزینه برای هاب ها مینیمم باشد. این مسئله بدین صورت مدل بندی شده است:

$$\min \quad \sum_k F_k Y_k \tag{۲۴-۱}$$

$$s.t. \quad ۰ \leq Y_k \leq ۱ \quad \text{and integer for all k} \tag{۲۵-۱}$$

$$X_{ij}^{km} \leq Y_k \quad \text{for all i,j,k,m} \tag{۲۶-۱}$$

$$X_{ij}^{km} \leq Y_m \quad \text{for all i,j,k,m} \tag{۲۷-۱}$$

$$\sum_k \sum_m V_{ij}^{km} X_{ij}^{km} \geq ۱ \quad \text{for all i,j} \tag{۲۸-۱}$$

که F_k هزینه ثابت برای مستقر کردن یک هاب در مکان k است. اگر همه F_k برابر باشند سپس هدف برابر با مینیمم کردن تعداد هاب ها است. برای F_k نا منفی، همه X_{ij}^{km} برابر صفر یا یک هستند.

اگر هزینه پوشش همه جفت های مبدا به مقصد بیش تر از مقداری که معین شده است، باشد برای مثال بیشتر از درآمدی که در دسترس است آنگاه یا تعدادی از جفت های مبدا به مقصد باید غیر پوشش قرار داده شوند یا مقادیر ماکزیمم هزینه که معین شده بود را نباید در نظر گرفت. اگر همه جفت های مبدا به مقصد نتوانند پوشیده شوند یک روش این است که یک جریمه نامنفی برای جفتی که پوشیده نشده است را در نظر گرفت. این مسئله بدین صورت مدل بندی شده است:

$$\min \quad \sum_k F_k Y_k + \sum_i \sum_j p_{ij} u_{ij} \tag{۲۹-۱}$$

$$s.t. \quad ۰ \leq Y_k \leq ۱ \quad \text{and integer for all k} \tag{۳۰-۱}$$

$$X_{ij}^{km} \leq Y_k \quad \text{for all i,j,k,m} \tag{۳۱-۱}$$

$$X_{ij}^{km} \leq Y_m \quad \text{for all i,j,k,m} \tag{۳۲-۱}$$

$$\sum_k \sum_m V_{ij}^{km} X_{ij}^{km} + u_{ij} \geq ۱ \quad \text{for all i,j} \tag{۳۳-۱}$$

که در این مدل p_{ij} جریمه جفت مبدا به مقصدی است که پوشش داده نشده اند . همچنین u_{ij} در صورتی که جفت مبدا به مقصد پوشش داده نشده باشند برابر یک است و در غیر اینصورت برابر صفر است.

اگر جواب مجموعه پوشش بیشتر از درآمد در دسترس بود، روش دیگر این است که مسئله هاب ماکزیمم پوشش را حل کرد. یعنی ماکزیمم تقاضاهای پوشیده شده توسط تعداد تسهیلات هاب داده شده است.

مدل مسئله هاب حداکثر پوشش به صورت زیر است:

$$\max \quad \sum_i \sum_j \sum_k \sum_m W_{ij} X_{ij}^{km} V_{ij}^{km} \tag{۳۴-۱}$$

$$s.t. \quad \sum_k Y_k = P \tag{۳۵-۱}$$

$$۰ \leq Y_k \leq ۱ \quad \text{and integer for all k} \tag{۳۶-۱}$$

$$۰ \leq X_{ij}^{km} \leq ۱ \quad \text{for all i,j,k,m} \tag{۳۷-۱}$$

$$\sum_k \sum_m X_{ij}^{km} = ۱ \quad \text{for all i,j} \tag{۳۸-۱}$$

$$X_{ij}^{km} \leq Y_k \quad \text{for all i,j,k,m} \tag{۳۹-۱}$$

$$X_{ij}^{km} \leq Y_m \quad \text{for all i,j,k,m} \tag{۴۰-۱}$$

این محدودیت ها مشابه محدودیت های مسئله $p-$هاب میانه هستند و در حقیقت مسئله پوششی ماکزیمم هاب یک مسئله $p-$هاب میانه دیگر است.

۲. **مسئله مکان یابی هاب مسطح:** در این نوع مسئله مکان یابی، مکان هاب ها محدود نیست و آن ها را در هر جایی از سطح می توان قرار داد. به این نوع مسئله، مسئله مکا یابی هاب پلانار می گویند (PHLP) . در این مقاله به یکی از مدل های مسئله مکان یابی هاب مسطح می پردازیم.

۱-۶ انواع مسائل مکان یابی از نظر محدودیت ظرفیت

محدودیت ظرفیت را می توان برای میزان جریان ورودی به هاب یا میزان جریانی که هر گره مجاز به فرستادن یا دریافت آن می باشد، در نظر گرفت. ظرفیت هر هاب، یک کران بالا برای جریان ورودی به هاب می باشد. با توجه به اینکه جریان انتقالی در هر مسیر مبدا به مقصد شامل سه مولفه است: جریان رسیده از از مبدا به اولین هاب (اجتماع) [۱]، انتقال جریان بین هاب اول و دیگر هاب ها (انتقال) [۲] و توزیع جریان از آخرین هاب به مقصد (توزیع) [۳]. بنابراین ظرفیت هر مسیر می تواند متفاوت از بقیه مسیر ها باشد. همچنین برای کاهش هزینه ها و تفاوت در نحوه توزیع جریان برای اجتماع، انتقال و توزیع جریان ضرایب کاهشی بین صفر و یک را در نظر میگیریم. هزینه های کاهشی اجتماع، انتقال و توزیع را به ترتیب با $\alpha_c, \alpha_t, \alpha_d$ نمایش می دهیم. بیشتر مسائل مکانیابی هاب، ظرفیتی برای جریان ورودی به هاب یا خروجی از هاب و یا جریان بین دو هاب دارند.

۱-۷ انواع مسائل مکان یابی از نظر تعداد هاب ها

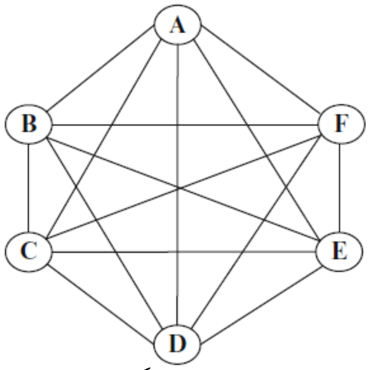
تعریف ۱-۷-۱. شبکه‌ای که تمام گره‌های آن به یکدیگر متصل باشند، شبکه کامل [۴] نامیده می‌شود.

فرض کنید n گره داریم به طوری که هر یک از این گره ها بتواند به عنوان مبدا و مقصد در نظر گرفته شود. در این صورت شبکه ای کامل با $n(n-۱)$ جفت مبدا و مقصد داریم، به طوری که جفت مبدا و مقصد (i, j) با (j, i) متفاوت است.

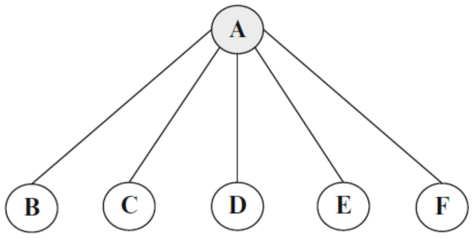
انواع مسائل مکان یابی از نظر تعداد هاب عبارتند از:

۱. **مسئله مکان یابی تک هابی:** برای پاسخگویی به تقاضا، مسئله مکان یابی هاب حرکت افراد، کالاها یا اطلاعات بین جفت مبدا و مقصد های خواسته شده را شامل می شود. هاب ها برای کاهش تعداد اتصال های انتقال بین گره های مبدا و مقصد کاربرد دارند. برای مثال ، یک شبکه کاملا متصل با k گره و هیچ هابی ، $k(k-۱)$ اتصال مبدا و مقصد دارد. در شکل ۱-۴ نمونه ای از یک شبکه کاملا متصل با ۶ گره و ۳۰ جفت مبدا و مقصد نشان داده شده است.
حال اگر یکی از گره‌های شبکه را هاب در نظر بگیریم و آن را به گره‌های دیگر که غیرهاب [۵] (یا اسپوک) نامیده می‌شوند وصل کنیم، در این صورت تنها $۲(k-۱)$ اتصال مبدا و مقصد وجود خواهد داشت. که این شبکه در شکل ۱-۵ نشان داده شده‌است.

[۱] Collection [۲] Transfer [۳] Distribution [۴] fully connected network [۵] spoke



شکل ۱-۴: شبکه کاملا متصل با ۶ گره و ۳۰ جفت مبدا - مقصد

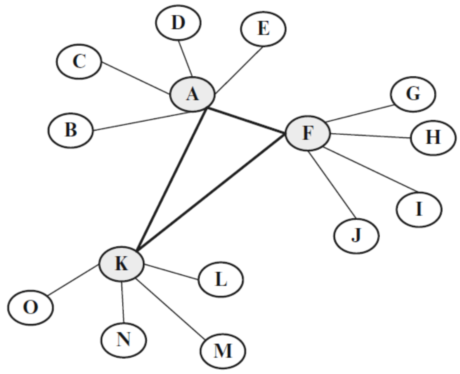


شکل ۱-۵: شبکه تک هابی با ۶ گره

در چنین سیستمی برای رفتن از هر گره غیرهاب به گره غیرهاب دیگر باید از گره هاب عبور کرد. که منجر به ایجاد بیش از یک گردش برای طی هر جفت مبدأ و مقصد خواهد شد. در این شبکه اگر خدمات وسایل نقلیه وجود داشته باشد و هر وسیله نقلیه بتواند روزانه ۵ جفت مبدأ و مقصد را سرویس‌دهی کند، در این صورت با ۱۸ وسیله نقلیه می‌توان روزانه ۹۰ جفت را سرویس‌دهی کرد. بنابراین، با توجه به معادله $k(k-1)$ قادر به سرویس ۱۰ گره در هر روز خواهیم بود. این در حالی است که با همین تعداد وسیله در شبکه تک هابی با توجه به معادله $2(k-1)$ می‌توان روزانه ۴۶ گره را سرویس‌دهی کرد. در نتیجه با وسایل نقلیه ثابت، تعداد شهرهای بیشتری در شبکه هاب نسبت به شبکه کامل سرویس‌دهی می‌شوند. اشکال اصلی چنین سیستمی که به همه گره ها به جز گره هاب مربوط می شود این است که برای گردش بین یک جفت مبدا و مقصد، بیش از یک گردش لازم است زیرا برای گردش از یک گره غیر هاب به دیگری باید از یک گره هاب عبور کنیم.

۲. **مسئله مکان یابی چند هابی:** در شبکه‌های چند هابی، فرض بر این است که گره‌های هاب کاملاً به یکدیگر متصل شده‌اند و هر گره غیرهاب یا دقیقاً با یک گره هاب در ارتباط است که معرف شبکه تک تخصیصی است و یا حداقل با یک گره هاب در ارتباط است که در این صورت معرف شبکه چندتخصیصی خواهد بود. در شکل ۱-۶ شبکه‌ای با ۱۵ شهر و ۳ هاب داده شده است.

معمولاً تعداد مسافران یا کالاهایی که از یک گره هاب به گره هاب دیگر حمل می‌شوند بیشتر از تعداد مسافران یا کالاهایی است که از هر گره غیرهاب به گره هاب موردنظر نقل مکان می‌کنند. برای مثال،



شکل ۱-۶: شبکه چند هابی با ۱۵ گره و ۳ هاب

اگر جریان بین هر جفت مبدأ و مقصد ۱۰ واحد باشد آنگاه ۱۴۰ واحد جریان بین هر گره غیرهاب و گره هابی که به آن متصل است وجود خواهد داشت اما ترافیک بین دو گره هاب ۲۵۰ واحد خواهد بود.

در شبکه‌های رابط، مانند شبکه راه یا شبکه کامپیوتری، ایجاد مسیرهای مستقیم بین هر جفت گره کار معقولی نیست. برای حل این مشکل از گره‌های هاب استفاده می‌شود. تأسیس مسیرهایی با کیفیت بالا بین هاب‌ها باعث کسب منافع اقتصادی خواهد شد که یکی از مزیت‌های استفاده از هاب‌هاست. در شبکه‌های راه‌آهن زمانی‌که بین دو گره تعداد زیادی راه ارتباطی وجود داشته باشد، ایجاد یک بزرگراه با چندین جاده بین این دو گره کاری اقتصادی است و منجر به حرکت سریع‌تر وسایل نقلیه و اتلاف کمتر سوخت می‌شود و بنابراین در زمان و هزینه صرفه‌جویی می‌گردد. در شبکه‌های کامپیوتری، کابل‌های فیبرنوری فقط برای اتصال هاب‌ها استفاده می‌شوند و به کار بردن آنها برای اتصال هر دو گره کاری اقتصادی نیست.

۱-۸ تاریخچه ای از مسئله مکان یابی هاب

بسیاری از مطالعات در زمینه مسئله مکان یابی هاب بر روی حل مسئله های مکان یابی گسسته تمرکز دارند. DHLP به عنوان NP-Hard شناخته شده است [۱] . بنابراین پژوهشگران روش های ابتکاری برای پیدا کردن یک راه حل خوب در مدت زمان معقول را ارائه داده اند. DHLP ابتدا توسط اکلی [1] مورد مطالعه قرار گرفت [۲]. او یک مدل برنامه ریزی عدد صحیح درجه دوم برای مکان یابی تسهیلات هاب را ارائه داد و دو روش ابتکاری برای حل آن ارائه کرد و نتایج محاسباتی این دو روش ابتکاری ساده را برای نمونه هایی که در آن ۲، ۳ یا ۴ هاب برای تعامل بین مجموعه هایی از ۱۰،

[1] O’Kelly

۱۵، ۲۰ و ۲۵ شهر قرار داده شده است را ارائه کرد. همچنین مدل برنامه ریزی خطی عدد صحیح دیگر برای مسئله مکان یابی هاب گسسته توسط کمپبل [۱] [۳]، برایان [۲] (۱۹۹۸)، ارنست [۳] و کریش نامورتی [۴] [۴] [۵] و اکلی و همکارانش [۶] ارائه شده است که ارنست و کریش نامورتی شبیه سازی تبریدی را برای حل این مساله ارائه کردند و در مطالعه دیگری الگوریتم شاخه و کران بر پایه مساله کوتاه ترین مسیر را برای حل مسئله بکار بردند. کلین وژ [۵] ابتدا یک فرآیند جستجوی را در سال ۱۹۹۱ [۷]، و سپس یک فرآیند جستجوی Tabu search و GRASP را ارائه داد [۸]. جواب های بدست آمده بوسیله این فرآیند های جستجو با یک تغییر کم از جواب های مسئله تخصیص چندگانه بدست می آیند. آبدینور هلم [۶] [۹] نیز شبیه سازی تبریدی را برای حل مساله پیشنهاد کردند. تاپکوگلو و همکارانش [۷] [۱۰] و کراتیکا و همکارانش [۸] [۱۱] این مسئله را با الگوریتم ژنتیک حل کردند. ایلیک و همکارانش [۹] [۱۲] یک متغیر محلی جستجوی ابتکاری برای حل مساله پیشنهاد کردند که مثال هایی تا ۱۰۰۰ گره را در مدت زمان معقول حل می کرد.

نسخه پلانار از مسئله مکان یابی هاب نسبت به نسخه گسسته کمتر مورد توجه بوده است بنابراین در این زمینه مطالعات کمتری صورت گرفته است.این مسئله ابتدا توسط اکلی مطرح شد [۱۳] پس از آن مسئله توسط آیکین [۱۰] [۱۴، ۱۵] و آیکین و براون [۱۱] [۱۶] مورد مطالعه قرار گرفت که آنها یک مدل مکان یابی-تخصیص اصلاح شده برای حل مساله مکان یابی تسهیلات ایجاد کردند که در آن تسهیلات جدید با یکدیگر در حال تعامل اند. اکلی یک روش خوشه بندی برای حل مسئله مکان یابی هاب مسطح را ارائه داد [۱۷]. او مثال هایی با حداکثر ۵۰۰ گره و ۹ هاب را حل کرد. اگرچه روش های محاسباتی متعددی برای مساله مکان یابی هاب گسسته مورد مطالعه قرار گرفته است اما مطالعه و توسعه محاسبات در حالت مسطح محدود است.

آلو و کارا [۱۲] [۱]، و کمپل و اکلی [۱۸] بررسی مفصلی روی مقاله های HLP انجام دادند. مقاله ای توسط روزینگ و ریول [۱۳] چاپ شده است که مجموعه ای از فرمولاسیون های یک مسئله را که در آن جریان در داخل خوشه حداکثر می شود. مسئله آنان به لحاظ مفهومی شبیه به آنچه که در این مقاله است، می باشد ولی با ساده سازی بیشتر که تعاملات بین خوشه ای در نظر گرفته نمی شود. مقاله دیگری با هدف مشابه توسط کلین و آروسون [۱۴] چاپ شده است که یک مدل برنامه نویسی را برای تعامل گروهی کامل فرمول بندی کرده است.

---

[۱] Campbell [۲] Bryan [۳] Ernst [۴] krishnamoorthy [۵] Klincewicz [۶] Abdinnour-Helm [۷] Topcuoglu et al. [۸] Kratica et al. [۹] Ilic et al. [۱۰] Aykin [۱۱] Aykin and Brown [۱۲] Alev and Kara [۱۳] K. Rosing and C. ReVelle [۱۴] G. Klein and J.E. Aronson

۱-۹ مروری بر مقالات پیشین

در این بخش به بررسی یکی از مقاله های مشهور ویز فلد [۱] با عنوان " نقطه ای که مجموع فواصل آن تا n نقطه داده شده مینیمم باشد [۲] " می پردازیم. این مقاله در اصل به زبان فرانسوی نوشته شده است. فرانک پلاستریا [۳] آن را به زبان انگلیسی ترجمه کرد. اکثرا به ویژه در تئوری مکان یابی، آن را ذکر می کنند همانطور که فرض شده است در اوایل سال ۱۹۳۷ یک الگوریتم تکراری همگرا برای حل مسئله مکان یابی تسهیلات تک تخصیصی بر پایه حداقل سازی مجموع با فواصل اقلیدسی در آن شرح داده شده است.

ویزفلد در مقاله خود یک مسئله مکان یابی را مطالعه نمی کرد. او مانند هر ریاضیدان ناب، علاقه مند به اثبات قضیه بود. در سن شانزده سالگی او به این سوال که نقطه ای که مجموع فاصله ها در آن تا n نقطه داده شده مینیمم بود، صرفا نگاه هندسی داشت.

ویزفلد در فضای d بعدی کار نکرد. همه مقالات تنها سطح دوبعدی و فضای سه بعدی را مورد بحث قرار می دهند. به ویژه اثبات های دوم و سوم با علم هندسه تطبیق داده شده اند و این دو مورد در مقاله به صورت مجزا بحث شده است.

ویزفلد نمی دانست که ممکن است روش او رد شود. یک خطای واقعی در مقاله او وجود دارد، همانطور که در بخش پایانی در اثبات اضافه شده است

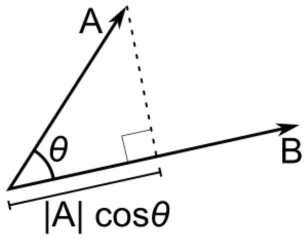
ویزفلد یک الگوریتم ابداع نکرد. یکی از روش های ویزفلد برای آزمودن شرایط بهینگی از طریق ساخت یک دنباله همگرا به نقطه بهینه بود. به هر حال با ابزار در دسترس در آن زمان این واقعا یک روش تجربی نبوده است. این وضعیت کاملا با پیدایش ماشین های با محاسبات قوی تغیر نکرد. نیاز و نتیجه جستجو برای الگوریتم ها تنها زمانی شروع شد که این ماشین ها به خوبی در ۱۹۶۰s برنامه پذیر بودند.

در ابتدا چند تعریف که در فهم اثبات استفاده شده است را آورده ایم.

تعریف ۱-۹-۱. اگر A و B دو بردار باشند، تصویر [۴] بردار A بر روی B برداریست مانند C و در جهت بردار B که طول آن برابر است با:

$$|C| = |A| \cos\theta$$

[۱] Weiszfeld [۲] on the point for which the sum of the distances to n given points is minimum
[۳] Frank Plastria [۴] image



شکل ۱-۷: تصویر بردار A بر روی بردار B

در رابطه اصلی $|B|$ را ضرب و تقسیم می کنیم:

$$|C| = \frac{|A||B|\cos\theta}{|B|}$$

حال با توجه به رابطه ضرب داخلی A در B یعنی $A.B = |A||B|\cos\theta$:

$$|C| = \frac{A.B}{|B|}$$

در حال حاضر C بدون زاویه و جهت مشخص است پس آن را در بردار واحد B ضرب می کنیم. چرا که باید C در جهت و زاویه B باشد و در نهایت با انجام محاسبات به فرمول نهایی زیر می رسیم:

$$C = \frac{A.B}{|B|}\hat{B} = \frac{A.B}{|B|}\frac{B}{|B|} = \frac{A.B}{|B|^{۲}}B$$

تعریف ۱-۹-۲. در هندسه، به پاره خطی که از یک راس مثلث به وسط ضلع روبرو کشیده می شود، میانه [۱] می گویند. یکی از خواص میانه این است که، میانه وارد بر هر ضلع از نصف مجموع دو ضلع دیگر کوچکتر است و از نصف تفاضل آن دو ضلع بزرگ تر است.

تعریف ۱-۹-۳. در هندسه، به نقطه وسط یک خط، نقطه میانی [۲] می گویند. این نقطه از هر دو نقطه انتهایی خط متساوی الفاصله است، و این نقطه مرکز خط و دو نقطه انتهایی خط است. این نقطه خط را به دو بخش مساوی تقسیم می کند.

تعریف ۱-۹-۴. دنباله تابعی است که دامنه اش مجموعه اعداد طبیعی و برد آن زیر مجموعه ای از اعداد حقیقی می باشد ($a : N \to R$).

تعریف ۱-۹-۵. می گوئیم یک دنباله کراندار است هرگاه تمام جملات آن از یک عدد ثابت مانند M، کوچکتر و از یک عدد ثابت مانند m، بزرگتر باشند، یعنی $m < a_n < M$. عدد M را کران بالای دنباله و عدد m را کران پائین دنباله می گویند.

[۱] median [۲] midpoint

تعریف ۱-۹-۶. دنباله ای که همواره صعودی یا همواره نزولی باشد، یکنوا نامیده می شود.

قضیه ۱. هر دنباله یکنوا و کراندار، همگراست.

قضیه ۲. حد هر دنباله همگرا منحصر به فرد است.

در این قسمت اثبات قضیه مینیمم نقطه [۱] با استفاده از قضایای دیگر بیان شده است.

قضیه ۱. فرض کنید n نقطه مجزا $A_۱, A_۲, ..., A_n$ در فضا داده شده است که روی خط مستقیم قرار نگرفته اند. سپس یک نقطه واحد وجود دارد که مجموع فاصله آن از این n نقطه مینیمم است. برای این نقطه M نامساوی زیر را داریم:

$$\sum_{i=۱}^{n} \|A_i - X\| > \sum_{i=۱}^{n} \|A_i - M\|$$

که برای هر نقطه X مجزا از M برقرار است. (که البته حداکثر یک نقطه از این نوع می تواند وجود داشته باشد.) این نقطه، مینیمم نقطه نامیده می شود،.

(آ) اگر یک نقطه واحد مجزا از $A_۱, A_۲, ..., A_n$ در فضا وجود داشته باشد، که برای آن رابطه زیر برقرار باشد

$$\sum_{i=۱}^{n} \frac{A_i - M}{\|A_i - M\|} = ۰ \qquad (M_۱)$$

این نقطه، مینیمم نقطه خواهد بود.

(ب) اگر یک نقطه واحد A_k، در میان $A_۱, A_۲, ..., A_n$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\|\sum_{i=۱}^{n}{}' \frac{A_i - A_k}{\|A_i - A_k\|}\| \leq ۱ \qquad (M_۲)$$

(علامت $\sum'$ نشان می دهد که عبارت K ام از مجموع حذف شده است)، سپس نقطه A_k مینیمم نقطه خواهد بود.

قضیه مینیمم نقطه به کمک قضایای دیگر اثبات شده است. در این اثبات یک دنباله نامتناهی از نقاط ایجاد شده است که به مینیمم نقطه همگراست و قضیه از ویژگی های دنباله نقاط نتیجه گرفته شده است.

---

[۱] minimum-point theorem

قضیه ۱. فرض کنید n نقطه مجزا $A_1, A_2, ..., A_n$ در فضا داده شده است که روی خط مستقیم قرار نگرفته اند. نقطه تصادفی P_1 مجزا از نقاط A را در نظر می گیریم. در این نقاط $A_1, A_2, ..., A_n$ جرم های نسبی زیر را قرار می دهیم

$$\frac{1}{\|A_1 - P_1\|}, \frac{1}{\|A_2 - P_1\|}, \dots, \frac{1}{\|A_n - P_1\|}$$

مرکز ثقل این جرم ها را با P_2 نشان می دهیم. و نقطه P_2 را تصویر نقطه P_1 می نامیم. سپس در نقاط $A_1, A_2, ..., A_n$ جرم های نسبی زیر را قرار می دهیم

$$\frac{1}{\|A_1 - P_2\|}, \frac{1}{\|A_2 - P_2\|}, \dots, \frac{1}{\|A_n - P_2\|}$$

و فرض کنید P_3 مرکز ثقل این جرم ها باشد(یعنی P_3 تصویر P_2 است). این روش را ادامه می دهیم، یک دنباله نامتناهی از نقاط

$$P_1, P_2, P_3, \dots$$

بدست می آوریم. این دنباله (P) همگراست، و نقطه همگرایی آن مینیمم نقطه نقاط $A_1, A_2, ..., A_n$ است که مستقل از مکان P_1 است.

قضایای کمکی

قضیه ۱. فرض می کنیم m نقطه متفاوت $B_1, B_2, ..., B_m$ و یک خط ℓ داده شده است به طوری که از تمام نقاط B عبور نمی کند، و روی آن یک نقطه مجزا X است. فرض می کنیم که در حالت کلی طول تصویر بردار a روی این خط با علامت $[a]_\ell$ مشخص شده است. سپس تصویر

$$\Big[\sum_{i=1}^{m} \frac{B_i - X}{\|B_i - X\|}\Big]_\ell$$

یک تابع کاهشی یکنواخت از X است.

برهان. فرض کنید X_1 و X_2 دو نقطه مجزا از خط ℓ باشند به طوری که بردار X_1X_2 در جهت ℓ

جهت دار شده است. باید نشان داده شود که

$$\Big[\sum_{i=1}^{m} \frac{B_i - X_1}{\|B_i - X_1\|}\Big]_\ell > \Big[\sum_{i=1}^{m} \frac{B_i - X_2}{\|B_i - X_2\|}\Big]_\ell$$

بدیهی است که

$$\Big[\frac{B_i - X_1}{\|B_i - X_1\|}\Big]_\ell \geq \Big[\frac{B_i - X_2}{\|B_i - X_2\|}\Big]_\ell \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

در صورتی که B_i روی خط ℓ قرار نداشته باشد، قطعا علامت $>$ را خواهیم داشت، زیرا طول بردار های $\frac{B_i - X_1}{\|B_i - X_1\|}$ و $\frac{B_i - X_2}{\|B_i - X_2\|}$ برابر ۱ است و زمانی که B_i روی خط ℓ نباشد، بردار اول نسبت به بردار دوم زاویه کوچکتری با خط ℓ می سازد. بنابراین با جمع این نامساوی داریم: (می دانیم که نقاط B_i روی خط ℓ قرار ندارند)

$$\sum_{i=1}^{m} \Big[\frac{B_i - X_1}{\|B_i - X_1\|}\Big]_\ell > \sum_{i=1}^{m} \Big[\frac{B_i - X_2}{\|B_i - X_2\|}\Big]_\ell$$

این برابر است با

$$\left[\sum_{i=1}^{m} \frac{B_i - X_1}{\|B_i - X_1\|}\right]_\ell > \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{B_i - X_2}{\|B_i - X_2\|}\right]_\ell$$

که این همان نامساوی خواسته شده است. $\square$

قضیه ۲. حداکثر یک نقطه در فضا می تواند وجود داشته باشد که در رابطه (M_1) صدق کند.

برهان. (برهان خلف) فرض می کنیم که چندین نقطه ممکن است وجود داشته باشد که در رابطه (M_1) صدق کنند. دو نقطه این چنینی را انتخاب می کنیم. بر اساس فرض، برای این نقاط داریم

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i - M_1}{\|A_i - M_1\|} = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i - M_2}{\|A_i - M_2\|} = 0$$

و

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i - M_1}{\|A_i - M_1\|}\right]_\ell = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i - M_2}{\|A_i - M_2\|}\right]_\ell \qquad (= 0)$$

نقاط M_1 و M_2 را با یک خط که از M_1 به طرف M_2 جهت دار شده است، وصل می کنیم، و نقاط $A_1, A_2, ..., A_n$ را به جای نقاط B که در قضیه ؟؟؟ بیان شده است، قرار می دهیم. (از آنجایی که نقاط A روی خط مستقیم قرار نگرفته اند، این انتخاب مجاز است) سپس برطبق قضیه ؟؟؟

داریم

$$\sum_{i=۱}^{n} \frac{A_i - M_۱}{\|A_i - M_۱\|} > \sum_{i=۱}^{n} \frac{A_i - M_۲}{\|A_i - M_۲\|}$$

که با فرض ما در تناقض است.

$\square$

قضیه ۳. اگر یک نقطه M در فضا وجود داشته باشد که در رابطه $(M_۱)$ صدق کند، آنگاه هیچ کدام از نقاط A در رابطه $(M_۲)$ صدق نمی کنند.

برهان. کافی است نشان دهیم که اگر

$$\sum_{i=۱}^{n} \frac{A_i - M}{\|A_i - M\|} = ۰ \tag{۱-۴۱}$$

آنگاه خواهیم داشت

$$\left\| \sum_{i=۲}^{n} \frac{A_i - A_۱}{\|A_i - A_۱\|} \right\| > ۱ \tag{۱-۴۲}$$

نقاط $A_۱$ و M را با خط ℓ که از $A_۱$ به طرف M جهت دار شده است، وصل می کنیم. فرض کنید X یک نقطه متغیر از خط ℓ باشد، و نقاط $A_۲, A_۳, ..., A_n$ به عنوان نقاط B انتخاب شده باشند که قطعا روی خط ℓ قرار نمی گیرند. سپس تابع

$$\left[\sum_{i=۲}^{n} \frac{A_i - X}{\|A_i - X\|} \right]_\ell = ۰$$

طبق قضیه ؟؟؟؟ به طور یکنواخت کاهشی است، بنابراین

$$\left[\sum_{i=۲}^{n} \frac{A_i - A_۱}{\|A_i - A_۱\|} \right]_\ell > \left[\sum_{i=۲}^{n} \frac{A_i - M}{\|A_i - M\|} \right]_\ell \tag{۱-۴۳}$$

اما، با توجه به این که

$$\frac{A_۱ - M}{\|A_۱ - M\|} = \left[\frac{A_۱ - M}{\|A_۱ - M\|} \right]_\ell = -۱$$

و رابطه $(M_۱)$، داریم

$$\sum_{i=۲}^{n} \frac{A_i - M}{\|A_i - M\|} = \left[\sum_{i=۲}^{n} \frac{A_i - M}{\|A_i - M\|}\right]_\ell = ۱ \qquad (۱-۴۴)$$

با یک نتیجه گیری از ۱-۴۳ و ۱-۴۴ داریم

$$\left[\sum_{i=۲}^{n} \frac{A_i - A_۱}{\|A_i - A_۱\|}\right]_\ell > ۱$$

که از روی این نابرابری خواسته شده استنباط می شود.

□

قضیه ۴. حداکثر یکی از نقاط A ممکن است در رابطه $(M_۲)$ صدق کنند.

برهان. برای اثبات کافی است نشان دهیم که به عنوان مثال اگر داشته باشیم

$$\left\|\sum_{i=۲}^{n} \frac{A_i - A_۱}{\|A_i - A_۱\|}\right\| \leq ۱ \qquad (۱-۴۵)$$

سپس

$$\left\|\sum_{i=۱}^{n}{}' \frac{A_i - A_۲}{\|A_i - A_۲\|}\right\| > ۱ \qquad (۱-۴۶)$$

نقاط $A_۱$ و $A_۲$ با یک خط ℓ که از $A_۱$ به سمت $A_۲$ جهت دار شده است، وصل شده اند، و نقاط $A_۳, A_۴, ..., A_n$ را به عنوان نقاط B که روی خط ℓ قرار نگرفته اند، در نظر می گیریم. سپس تصویر

$$\left[\sum_{i=۳}^{n} \frac{A_i - X}{\|A_i - X\|}\right]_\ell$$

طبق قضیه ؟؟؟ به طور یکنواخت کاهشی است، و بنابراین

$$\left[\sum_{i=۳}^{n} \frac{A_i - A_۱}{\|A_i - A_۱\|}\right]_\ell > \left[\sum_{i=۳}^{n} \frac{A_i - A_۲}{\|A_i - A_۲\|}\right]_\ell \qquad (۱-۴۷)$$

از ۱-۴۵ داریم

$$\left[\sum_{i=۲}^{n} \frac{A_i - A_۱}{\|A_i - A_۱\|}\right]_\ell \leq ۱$$

و با توجه به اینکه

$$\left[\sum_{i=۲}^{n}\frac{A_i-A_۱}{\|A_i-A_۱\|}\right]_\ell=\left[\frac{A_۲-A_۱}{\|A_۲-A_۱\|}\right]_\ell+\left[\sum_{i=۳}^{n}\frac{A_i-A_۱}{\|A_i-A_۱\|}\right]_\ell=۱+\left[\sum_{i=۳}^{n}\frac{A_i-A_۱}{\|A_i-A_۱\|}\right]_\ell$$

نامساوی زیر بدست می آید

$$\left[\sum_{i=۳}^{n}\frac{A_i-A_۱}{\|A_i-A_۱\|}\right]_\ell\leq ۰$$

در نتیجه از ۱-۴۷ داریم

$$\left[\sum_{i=۳}^{n}\frac{A_i-A_۲}{\|A_i-A_۲\|}\right]_\ell< ۰ \qquad (۱-۴۸)$$

اما

$$\left[{\sum_{i=۱}^{n}}'\frac{A_i-A_۲}{\|A_i-A_۲\|}\right]_\ell=\left[\frac{A_۱-A_۲}{\|A_۱-A_۲\|}\right]_\ell+\left[\sum_{i=۳}^{n}\frac{A_i-A_۲}{\|A_i-A_۲\|}\right]_\ell=-۱+\left[\sum_{i=۳}^{n}\frac{A_i-A_۲}{\|A_i-A_۲\|}\right]_\ell$$

بنابراین، با به ۱-۴۸ داریم

$$\left[{\sum_{i=۱}^{n}}'\frac{A_i-A_۲}{\|A_i-A_۲\|}\right]_\ell<-۱$$

و یا

$$\left\|\left[{\sum_{i=۱}^{n}}'\frac{A_i-A_۲}{\|A_i-A_۲\|}\right]_\ell\right\|>۱$$

با توجه به این نامساوی، رابطه ۱-۴۶ بدست می آید. $\square$

قضیه ۵. داریم

$$\sum_{i=۱}^{n}\|A_i-P_{r+۱}\|\leq\sum_{i=۱}^{n}\|A_i-P_r\| \qquad r=۱,۲,۳,\dots ad.inf.$$

که علامت $=$ تنها در حالتی صحیح است که $P_r\equiv P_{r+۱}$ باشند.

قضیه ۶. دنباله (P) ، یک نقطه همگرایی دارد.

برهان. برای اثبات به [۲۰] مراجعه کنید. $\square$

قضیه ۷. فرض می کنیم دنباله نقاط (P)، یک نقطه همگرایی (M) مجزا از نقاط A دارد. روش مورد نظر را روی این نقطه اعمال می کنیم، نقطه بدست آمده به عنوان تصویر، خود نقطه M خواهد بود.

برهان. (فرض خلف) فرض می کنیم که تصویر M یک نقطه M' باشد، $M \equiv M'$، و می خواهیم به تناقض برسیم. نقطه M' نقطه همگرایی دنباله (P) است، ؟؟؟؟؟؟/؟؟؟؟؟؟؟ با توجه به قضیه ۱-۹ داریم

$$\sum_{i=1}^{n} \|A_i - M\| > \sum_{i=1}^{n} \|A_i - M'\| \tag{۱-۴۹}$$

از طرف دیگر داریم که دنباله ای از مقادیر مثبت (به طور یکنواخت کاهشی)

$$\sum_{i=1}^{n} \|A_i - P_1\|, \sum_{i=1}^{n} \|A_i - P_2\|, \sum_{i=1}^{n} \|A_i - P_3\|, \ldots,$$

همگراست. اما پس از آن، برای هر نقطه همگرایی دنباله (P)، پس همچنین برای M و M' داریم

$$\sum_{i=1}^{n} \|A_i - M\| = \sum_{i=1}^{n} \|A_i - M'\| \tag{۱-۵۰}$$

که این با رابطه ۱-۴۹ در تناقض است. $\square$

قضیه ۸. نقطه همگرایی (M) از (P)، که با هیچ یک از نقاط A منطبق نیست، در رابطه M_1 صدق می کند.

برهان. برای اثبات به [۲۰] مراجعه کنید. $\square$

قضیه ۹. دنباله (p) حداکثر یک نقطه همگرایی متفاوت از نقاط A دارد.

برهان. از قضیه ۱-۹ داشتیم که یک چنین نقطه همگرایی در رابطه (M_1) صدق می کند، در حالی که طبق قضیه ۱-۹ داریم که حاکثر یک نقطه می تواند وجود داشته باشد که در رابطه (M_1) صدق کند. $\square$

قضیه ۱۰. اگر نقطه A_k یک نقطه همگرایی از دنباله (P) باشد، در عین حال آن تنها نقطه همگرایی این دنباله است.

برهان. برای اثبات به [۲۰] مراجعه کنید. □

قضیه ۱۱. اگر نقطه A_k یک نقطه همگرایی دنباله (P) باشد، آنگاه در رابطه M_2 صدق می کند.

برهان. برای اثبات به [۲۰] مراجعه کنید. □

اثبات قضیه درباره نقطه همگرایی دنباله (P)

قضیه ۱. دنباله (P) همگراست، نقطه همگرایی آن در یکی از روابط (M) صدق می کند، و مکان نقطه همگرایی مستقل از انتخاب P_1 است.

برهان. قسمت اول ادعا خلاصه ای از اصل های ۱-۹ تا ۱-۹ است. در واقع، اگر دنباله یک نقطه همگرایی در یکی از نقاط A بدهد، طبق قضیه ۱-۹ آن تنها نقطه همگرایی دنباله خواهد بود، و این نقطه طبق قضیه ۱-۹ در رابطه M_2 صدق می کند. اگر، به عبارتی، هیچ یک از نقاط A نقطه همگرایی دنباله (P) نباشند، سپس، طبق قضیه ۱-۹ این دنباله تنها یک نقطه همگرایی دارد که طبق قضیه ۱-۹ در رابطه M_1 صدق می کند. برای اثبات قسمت دوم ادعا، یک نقطه P_1' مجزا از P_1 در نظر می گیریم، و از این نقطه با استفاده از روش مورد نظر شروع می کنیم، دنباله ای از نقاط ساخته می شود

$$P_1', P_2', P_3', \ldots . \qquad (P')$$

سپس فرض می کنیم که نقطه همگرایی M' دنباله (P') مجزا از نقطه همگرایی M دنباله (P) است. برای این دو نقطه، باید یکی از روابط زیر برقرار باشد

$$\begin{array}{ll}
a. & \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i - M}{\|A_i - M\|} = 0 \quad and \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i - M'}{\|A_i - M'\|} = 0, \\
b. & \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i - M}{\|A_i - M\|} = 0 \quad and \quad \left\| \sum_{i=1}^{n}{}' \frac{A_i - M'}{\|A_i - M'\|} \right\| \leq 1, \\
c. & \left\| \sum_{i=1}^{n}{}' \frac{A_i - M}{\|A_i - M\|} \right\| \leq 1 \quad and \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i - M'}{\|A_i - M'\|} = 0 \\
d. & \left\| \sum_{i=1}^{n}{}' \frac{A_i - M}{\|A_i - M\|} \right\| \leq 1 \quad and \quad \left\| \sum_{i=1}^{n}{}' \frac{A_i - M'}{\|A_i - M'\|} \right\| \leq 1
\end{array}$$

اما بین $a.$ و ۱-۹؛ $b.$ و ۱-۹؛ $c.$ و ۱-۹؛ $d.$ و ۱-۹ تناقض وجود دارد.

□

قضیه ۲. نقطه همگرایی دنباله (P)، مینیمم نقطه نقاط A است.

برهان.

۱. فرض کنید X یک نقطه دلخواه مجزا از نقاط A و نقطه همگرایی M دنباله (P)، باشد. از X شروع می کنیم و طبق روش مورد نظر دنباله ای از نقاط را می سازیم

$$X, X_۲, X_۳, \dots . \tag{X}$$

طبق قضیه ۱-۹ نقطه M نقطه همگرایی این دنباله است. اما X منطبق با M نیست، بنابراین طبق قضیه ۱-۹ داریم

$$\sum_{i=۱}^{n} \|A_i - X\| > \sum_{i=۱}^{n} \|A_i - X_۲\| > \sum_{i=۱}^{n} \|A_i - X_۳\| > \dots > \dots = \lim_{r=\infty} \sum_{i=۱}^{n} \|A_i - X_r\| = \sum_{i=۱}^{n} \|A_i - M\|$$

و بنابراین

$$\sum_{i=۱}^{n} \|A_i - X\| > \sum_{i=۱}^{n} \|A_i - M\|$$

که از این نتیجه می گیریم M مینیمم نقطه است. $\square$

۲. حال یکی از نقاط A را به عنوان نقطه X در نظر می گیریم، اما مجزا از M. فرض می کنیم که نقطه $A_۱$ از این نوع باشد. با این فرض که

$$\sum_{i=۱}^{n} \|A_i - M\| \geq \sum_{i=۱}^{n} \|A_i - A_۱\| \tag{۵۱-۱}$$

می خواهیم به تناقض برسیم.
فرض میکنیم C نقطه میانی قطعه $\|A_۱ - M\|$ باشد. از آنجایی که در هر مثلث میانه وارد بر هر ضلع از میانگین حسابی دو ضلع دیگر کوچکتر است، داریم

$$\|A_i - C\| \leq \frac{\|A_i - M\| + \|A_i - A_۱\|}{۲} \qquad (i = ۱, ۲, \dots, n) \tag{۵۲-۱}$$

که علامت $=$ فقط زمانی برقرار است که نقطه A_i روی خط $A_۱M$ قرار داشته باشد.اما همه نقاط A نمی توانند روی خط $A_۱M$ قرار داشته باشند، بنابراین با جمع کردن نامساوی ها از (۲) بدست می

آید که

$$\sum_{i=۱}^{n} \|A_i - C\| \leq \frac{\sum_{i=۱}^{n} \|A_i - M\| + \sum_{i=۱}^{n} \|A_i - A_۱\|}{۲} \qquad (i = ۱, ۲, \ldots, n)$$

و از (۱-۵۱) داریم

$$\sum_{i=۱}^{n} \|A_i - C\| < \sum_{i=۱}^{n} \|A_i - M\|$$

اگر C با هیچ یک از نقاط A منطبق نباشد، با شماره قبل متناقض است. اما اگر C در یکی از نقاط A قرار بگیرد، ما میانه C' از قطعه $\|M - C\|$ را در نظر می گیریم، و یا اگر دوباره این در یکی از نقاط A، میانه C'' از قطعه $\|M - C'\|$ ، و غیره، تا زمانی که یک نقطه مجزا از نقاط A پیدا شود. برای این نقطه نامساوی بالا را که قبلا برای C بدست آوردیم، را داریم، و بنابراین دوباره به تناقض می رسیم.

فصل ۲

مدل ریاضی PHLP

۲-۱ مقدمه

یک شبکه هاب - اسپوک شامل نقاط در حال تعامل و سه نوع اتصال اجتماع، انتقال و توزیع را در نظر بگیرید. شرایط زیررا برای PHLP در نظر می گیریم:

- تعداد هاب ها داده شده است.
- هاب ها کاملا متصل اند و همه جریان بین هر جفت اسپوک ها از میان هاب ها عبور می کند، یعنی حمل و نقل مستقیم بین اسپوک ها وجود ندارد.
- ظرفیت هاب ها نا محدود است.
- هر اسپوک فقط به یک هاب اختصاص داده میشود و امکان اختصاص یک اسپوک به چندین هاب وجود ندارد.

در فصل ۱ دو مسئله PHLP و DHLP به طور بسته شرح داده شدند. در این فصل ابتدا نکاتی که به طور معمول در هر دو فرمول برنامه ریزی ریاضی PHLP و DHLP استفاده شده است را ارائه می دهیم، و در قسمت بعد ابتدا مدل برنامه ریزی ریاضی DHLP مورد بررسی قرار می گیرد تا کاملا قابل فهم باشد و سپس به مدل برنامه ریزی ریاضی PHLP می پردازیم.

۲-۲ معرفی متغیر های مدل برنامه ریزی ریاضی

در این قسمت متغیر هایی را که در مدل برنامه ریزی هر دو مسئله PHLP و DHLP استفاده شده است را معرفی می کنیم.

n	تعداد گره ها (اسپوک ها) در شبکه هاب - اسپوک
p	تعداد هاب ها
i, j	اندیس های گره ها i,j=1, …,n
k, l	اندیس های گره ها k,l=1,…,p
w_{ij}	نمایش وزن، مقدار جریان از گره i به گره j
α_c	هزینه اجتماع جریان از یک گره مبدا به یک هاب
α_d	هزینه توزیع جریان از یک هاب به یک گره مقصد
α_t	هزینه انتقال جریان بین یک جفت هاب بطوریکه $\alpha_t \leq \min\{\alpha_c, \alpha_d\}$
d_{ik}	فاصله از گره i تا گره k

۳-۲ مدل برنامه ریزی ریاضی PHLP

در این قسمت ابتدا مدل برنامه ریزی ریاضی DHLP معرفی شده است. در این مدل x_{ik} نشان دهنده تخصیص اسپوک ها به هاب ها برای هر i≠k است، به طوری که اگر گره i به هاب k تخصیص داده شده باشد x_{ik} مقدار ۱ می گیرد و در غیر اینصورت مقدار ۰ می گیرد. زمانی که i=k است، x_{kk} مقدار ۱ می گیرد. این بدین معنی است که گره به عنوان هاب انتخاب شده است.سپس مدل برنامه ریزی ریاضی DHLP به صورت زیر است:

$$\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_{ij}\left\{\sum_{k=1}^{p}\alpha_c d_{ik}x_{ik} + \sum_{l=1}^{p}\alpha_d d_{jl}x_{jl} + \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{p}\alpha_t d_{kl}x_{ik}x_{jl}\right\} \quad (۱-۲)$$

$$\text{s.t.} \qquad (n-p+1)\,x_{kk} - \sum_{i=1}^{n} x_{ik} \geq 0 \qquad \forall k \quad (۲-۲)$$

$$\sum_{k=1}^{p} x_{ik} = 1 \qquad \forall i \quad (۳-۲)$$

$$\sum_{k=1}^{p} x_{kk} = p \quad (۴-۲)$$

$$x_{ik} \in \{0, 1\} \qquad \forall i, k \quad (۵-۲)$$

تابع هدف (۲-۱) تابعی از هاب های انتخاب شده و تصمیمات تخصیص است. سه عبارت به ترتیب هزینه های اجتماع از اسپوک ها به هاب ها ، هزینه های توزیع از هاب ها به اسپوک ها و هزینه های انتقال بین هاب ها را بیان می کنند. در واقع هدف مینیمم کردن هزینه ها است. محدودیت (۲-۲) برای اختصاص گره های غیر هاب به گره های هاب استفاده می شود . در این نوع مسئله یک گره هاب نمی تواند به هاب دیگری اختصاص داده شود اما یک هاب با هیچ اسپوکی می تواند وجود داشته باشد. محدودیت (۲-۳) تضمین می کند که هر اسپوک به طور دقیق به یک هاب اختصاص داده شده است به عبارت دیگر این محدودیت بررسی می کند که هر اسپوک تنها به یک هاب اختصاص داده شود . محدودیت(۲-۴) بررسی میکند که تعداد هاب ها دقیقا p تا است. عبارت (۲-۵) بیان می کند که مقدار x_{ik} برابر با ۰ یا ۱ است.

تخصیص اسپوک ها به هاب ها برای $DHLP$ و $PHLP$ مشابه است. با این حال یک تفاوت اساسی بین این دو مدل وجود دارد. در $DHLP$ هاب ها را می توان تنها روی گره های داده شده قرار داد ولی در $PHLP$ هاب ها را می توان در هر نقطه از فضای دو بعدی و یا بالاتر قرار داد. بنابراین در $PHLP$ علاوه بر متغیر تصمیم گسسته که برای اختصاص اسپوک ها به هاب ها وجود دارد یک متغیر تصمیم پیوسته برای تعیین مکان هاب ها وجود دارد. در این مسئله متغیر تصمیم گسسته یک متغیر باینری است ، X_{ik} مقدار ۱ می گیرد اگر گره i به هاب k تخصیص داده شده باشد در غیر اینصورت مقدار ۰ می گیرد.

برای تعیین مکان هاب یک بردار مکان لازم است. از آنجا که روی سطح مسطح کار شده است پس بردار مکان دو عضو دارد ، اما این را می توان به ابعاد بالاتر تعمیم داد.

در مسئله های مکان یابی پیوسته، اگرچه هر نرم فاصله ای را می توان استفاده کرد اما فاصله اقلیدسی اندازه فاصله معروفی است و تنها اندازه ای است که در $PHLP$ ها استفاده شده است.

تعریف ۲-۳-۱. اگر مکان گره i توسط بردار $a_i = (a_i^1, a_i^2)$ داده شده باشد آنگاه اندازه فاصله اقلیدسی بین هاب k و گره i به صورت زیر محاسبه می شود:

$$d(y_k, a_i) = \| y_k - a_i \| = \sqrt{(y_k^1 - a_i^1)^2 + (y_k^2 - a_i^2)^2} \qquad (۲-۶)$$

پس فرمول برنامه ریزی ریاضی $PHLP$ به صورت زیر است:

$$\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_{ij}\left\{ \sum_{k=1}^{p} \alpha_c d(y_k, a_i) x_{ik} + \sum_{l=1}^{p} \alpha_d d(y_l, a_j) x_{jl} + \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{p} \alpha_t d(y_k, y_l) x_{ik} x_{jl} \right\} \qquad (۲-۷)$$

$$\text{subject to} \qquad \sum_{k=۱}^{p} x_{ik} = ۱ \qquad \forall i \tag{۸-۲}$$

$$\sum_{i=۱}^{n} x_{ik} \geq ۱ \qquad \forall k \tag{۹-۲}$$

$$x_{ik} \in \{۰, ۱\} \qquad \forall i, k \tag{۱۰-۲}$$

تابع هدف (۲-۷) مجموع هزینه های حمل و نقل (هزینه های اجتماع ، توزیع و انتقال) را مینیمم می کند. محدودیت (۲-۸) تضمین می کند که هر گره تنها به یک هاب اختصاص داده شود. محدودیت (۲-۹) تضمین می کند که حداقل باید یک اسپوک به هر هاب اختصاص داده شده باشد بنابراین دقیقا p هاب استفاده شده وجود دارد. محدودیت (۲-۱۰) محدودیتی با مقدار صحیح ۰ و ۱ برای متغیر های تصمیم x_{ik} است.

آیکین و براون [۱۶] همچنین یک مدل برای مسئله $PHLP$ مشابه با مسئله بالا ارائه داده اند. مدل آنها بر اساس مدل برنامه ریزی ریاضی مسئله مکان یابی-تخصیص است در واقع آنها مسائل مکان یابی-تخصیص که شامل تعاملات تسهیلات جدید روی یک سطح هستند را بررسی می کنند. که در آن جریان بین تسهیلات موجود از بین تسهیلات جدید هدایت می شود و تسهیلات جدید در تعامل با یکدیگر هستند و میزان تعاملات آنها بوسیله جریان بین تسهیلات موجود که به آنها خدمت رسانی می کنند تعیین می شود. در این فرمول آنها فرض کرده اند که هزینه های اجتماع و توزیع با هم برابرند و یک فاکتور تخفیف برای هزینه انتقال بین هاب ها در نظر گرفته اند. بنابراین داریم : $\alpha_t = \tau\alpha_c = \tau\alpha_d$ که $\tau \in [۰, ۱]$ فاکتور تخفیف است. آنها همچنین فرض کرده اند که وزن ها متقارن هستند به طوری که برای هر i, j داریم $w_{ij} = w_{ji}$. در مسئله بالا هزینه های انتقال ، اجتماع و توزیع متفاوت هستند و لزوما وزن ها متقارن نیستند . بنابراین این فرمول کلی تر است و مشکلات زندگی واقعی را بهتر از فرمول آیکین و براون مورد بررسی قرار می دهد. علاوه بر این آنها مجموعه محدودیت (۲-۹) در مسئله بالا را استفاده نمی کنند و این بدان معنی است که تعدادی هاب بدون هیچ اسپوکی می تواند وجود داشته باشند.

۴-۲ الگوریتم ژنتیک

در این قسمت ابتدا برخی از مفاهیم اصلی الگوریتم ژنتیک را بیان می کنیم و سپس راه حل این مسئله که با استفاده از الگوریتم ژنتیک است را مورد بررسی قرار می دهیم. الگوریتم های ژنتیک (GAs) الگوریتم های فرا ابتکاری مبتنی بر جمعیت هستند که به طور گسترده ای برای حل مسئله های ترکیبی استفاده می شود. الگوریتم ژنتیک یکی از پر کاربرد ترین روش های فرا ابتکاری برای حل مسائل بهینه سازی است. این الگوریتم علاوه بر داشتن یک منطق بسیار ساده برای حل مسائل بهینه سازی، قابلیت به دست آوردن جواب نزدیک به بهینه برای انواع مسائل پیچیده ای را که با سایر روش ها جواب مناسبی برای آنها یافت نمی شود، دارد. دربرخی از مطالعات GAs برای حل DHLP پیشنهاد شده است [۱۰، ۱۱]. در ابتدا برخی از مفاهیم اصلی الگوریتم ژنتیک را مورد بررسی قرار می دهیم. از آنجائیکه ایده اصلی GAs بر پایه اصل انتخاب طبیعی است، اصطلاحات استفاده شده در این الگوریتم ها نیز برگرفته از این اصل هستند.

تعریف ۲-۴-۱. به رشته ای که از تعدادی ژن کد گذاری شده که نشان دهنده اجزای جواب هستند، تشکیل شده است، کروموزوم [۱] می گویند. هر جواب مسئله بهینه سازی ترکیبی با یک کروموزوم نشان داده می شود. در واقع در الگوریتم ژنتیک یک فرد یا یک کروموزوم نشان دهنده یک جواب مسئله است. اگرچه برای نمایش کروموزوم ها، معمولا از کدگذاری های دودویی (رشته های بیتی) استفاده می شود.

تعریف ۲-۴-۲. اعضای تشکیل دهنده کروموزوم ها، ژن [۲] نامیده می شود که معمولا هر ژن مقدار یکی از متغیر های مسئله زا نشان می دهد. اگر متغیر های مسئله مستقل باشند برای هر کدام یک ژن تعریف می کنیم چون متغیر های وابسته مسئله را می توان با داشتن مقدار متغیر های مستقل بدست آورد.

تعریف ۲-۴-۳. تابعی که میزان برازنده یا سازگار بودن یک کروموزوم را نسبت به هدف مسئله ارزیابی می کند، تابع برازندگی [۳] نامیده می شود. این تابع معمولا نامنفی است و معمولا در الگوریتم ژنتیک به دنبال ماکزیمم کردن مقدار برازندگی کروموزوم ها هستیم.

تعریف ۲-۴-۴. به مجموعه ای از کروموزوم ها که در کنار هم قرار گرفته اند، جمعیت [۴] گفته می شود. به عبارت دیگر هر کروموزوم یک فرد از افراد جمعیت است.

تعریف ۲-۴-۵. هر تکرار الگوریتم را یک نسل [۵] می‌نامند.

[۱] chromosome [۲] gene [۳] fitness function [۴] population [۵] generation

تعریف ۲-۴-۶. به هر یک از کروموزوم های شرکت کننده در عمل تقاطع یا جهش، والد می گویند.

تعریف ۲-۴-۷. به ترکیب ژنتیکی دو یا چند کروموزوم به منظور تولید فرزند [۱] عمل تقاطع [۲] گفته می شود. به عبارت دیگر، فرزند حاصل از عمل تقاطع ژنتیکی بعضی از صفات را از پدر و بعضی دیگر را از مادرش به ارث می برد. مثلا رنگ چشمش را از پدر و رنگ پوست و یا طول قد را از مادر به ارث می برد. در الگوریتم ژنتیک، عمل تقاطع به شیوه های بسیار متفاوت و متعددی انجام می شود که عبارتند از: تقاطع تک نقطه ای، تقاطع دو نقطه ای، تقاطع چند نقطه ای، تقاطع یکنواخت، تقاطع PMX، تقاطع MOX.

تعریف ۲-۴-۸. نرخ تولید فرزندان جدید به روش تقاطع را نرخ تقاطع می‌گویند و آن را با P_c نشان می‌دهند که معمولاً در دامنه‌ی [۰.۵, ۱] قرار دارد.

اگر اندازه جمعیت $Popsize$ باشد، آنگاه باید تعداد $P_c \times PopSize$ فرزند جدید را با استفاده از انجام عمل تقاطع روی افراد جامعه فعلی ایجاد کرد.

مثال ۲-۴-۹. اگر نرخ تقاطع را $P_c = ۰.۵۲$ فرض کنیم و ۴ کروموزوم داشته باشیم، در این صورت عملگر تقاطع بر روی دو کروموزوم اعمال می‌شود ($۰.۵۲ \times ۴ = ۲.۰۸ \simeq ۲$).

تعریف ۲-۴-۱۰. به تغییر مقدار چند ژن در یک کروموزوم به منظور تولید فرزند، عمل جهش [۳] گفته می شود. در طبیعت معمولا احتمال کمی وجود دارد که فرزندی خصوصیتی را دارا باشد که آن مشخصه جزو خصوصیات ژنتیکی پدر و مادرش نباشد. در این وضعیت ، حالتی از جهش ژن ها به وجود آمده است. اگر در هنگام اتفاق افتادن عمل جهش، خصوصیتی برنده شود، این مشخصه تازه ایجاد شده شانس گسترش و بروز در نسل های بعدی را پیدا می کند. به عبارت دیگر این خصوصیت در یک محوطه ایزوله شده باقی می ماند و به سرعت به نسل های بعدی منتقل می شود. در الگوریتم ژنتیک عمل جهش به شیوه های مختلفی انجام می شود که عبارتند از: جهش یکنواخت، جهش تعویض، جهش تعویض با همسایه، جهش تعویض گروهی، جهش وارون ساز تک نقطه ای، جهش وارون ساز دو نقطه ای، جهش شیفت به راست، جهش جای گذاری، جهش جای گذاری گروهی.

تعریف ۲-۴-۱۱. نرخ تولید فرزندان جدید به روش جهش را نرخ جهش می‌نامند و آن را با P_m نشان می‌دهند. معمولا نرخ جهش کوچک بوده و بسته به نوع مسئله تعیین می‌گردد.

اگر اندازه جمعیت $Popsize$ باشد، آنگاه باید تعداد $P_m \times PopSize$ فرزند جدید را با استفاده از انجام عمل جهش روی افراد جامعه فعلی ایجاد کرد.

---
[۱] child [۲] crossover [۳] mutation

مثال ۲-۴-۱۲. اگر نرخ جهش $P_m = ۰.۰۱$ فرض شود، در این صورت روی جمعیتی با ۴ کروموزوم هیچ جهشی صورت نمی‌گیرد ($۰.۰۱ \times ۴ = ۰.۰۴ \simeq ۰$).

الگوریتم ژنتیک با یک جمعیت اولیه از جواب ها شروع می شود که این جمعیت از طریق نسل استنتاج می شود. در هر نسل، افراد با برازندگی بالاتر به عنوان پدر و مادر برای تکثیر با عملگر تقاطع انتخاب می شوند. فرزندان از طریق جهش تولید شده و جایگزین همه یا پدر و مادر با برازندگی پایین تر می شوند. به این ترتیب، ویژگی های خوب به بیشتر مردم گسترش داده می شود، ترکیب با دیگر ویژگی های خوب و در نهایت تولید افراد با برازندگی بیشتر.

تعریف ۲-۴-۱۳. اگر S کل فضای جواب باشد، آنگاه جواب $s \in S$، یک بهینه محلی است، اگر بهترین کیفیت را نسبت به تمام همسایه‌های خود داشته باشد.

۲-۴-۱ حل مسئله PHLP با الگوریتم ژنتیک

در PHLGA دو مجموعه از متغیر های تصمیم (متغیر های تخصیص و مکان یابی) در دامنه های مختلف تعریف شده اند. بنابراین از طرح های نمایش مختلف برای هر مجموعه متغیر های تصمیم استفاده شده است.

- تخصیص اسپوک ها به هاب ها با یک بردار $n \times ۱$ بیان شده است. در این طرح ، i امین عضو از بردار، شماره هابی را که گره i به آن تخصیص داده شده را نشان میدهد. بنابراین، هر ژن یک مقدار از مجموعه {۱،...،p} را می تواند بگیرد.

  مثال ۲-۴-۱۴. برای یک مسئله با $n = ۷$ گره و $p = ۳$ هاب یک نمونه از طرح تخصیص به صورت زیر داریم:

۱	۲	۳	۲	۲	۱	۳

در این طرح تخصیص گره ۱ به هاب ۱، گره ۲ به هاب ۲، گره ۳ به هاب ۳، گره ۴ به هاب ۲، گره ۵ به هاب ۲، گره ۶ به هاب ۱ و گره ۷ به هاب ۳ تخصیص داده شده است.

- مکان هاب ها با یک ماتریس $p \times ۲$ بیان شده است. k امین سطر از ماتریس، مختصات هاب k را نشان می دهد.

مثال ۲-۴-۱۵. مکان هاب ها برای یک مساله با $p = ۳$ به صورت زیر نمایش داده می شود.

$$Y = \begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \\ y_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۸ & ۱۲ \\ ۴ & ۱ \\ ۲۰ & ۴ \end{bmatrix}$$

۲-۴-۲ تابع برازندگی

تابع هدف (۲-۷) از مسئله p۲ به عنوان تابع برازندگی استفاده شده است. از آنجا که هدف مینیمم کردن مقدار تابع هدف است در نتیجه مقدار پایین تابع هدف بر برازندگی بالاتر اشاره دارد.

۲-۴-۳ تولید جمعیت اولیه

جمعیت اولیه معمولا به صورت تصادفی تولید می شود. در این روش تولید جمعیت اولیه در $PHLGA$برای تولید نخستین افراد جمعیت هاب ها را به طور تصادفی روی سطح مسطح قرار داده و سپس هر گره به نزدیکترین هاب اختصاص داده می شود.

۲-۴-۴ انتخاب والدین

در هر نسل از $PHLGA$ ، همه اعضای جمعیت اجازه شرکت کردن در عمل تقاطع یا جهش به منظور تولید فرزند را دارند. برای انتخاب دو والد برای تولید فرزند، ابتدا اعضای جمعیت را به هم می ریزیم، و سپس والدین را از این دنباله تصادفی ، یکی بعد از دیگری انتخاب می کنیم. به عبارت دیگر، ابتدا دو عضو ۱ و ۲ به عنوان والد برای تولید فرزندان انتخاب می شوند و سپس افراد ۲ و ۳ و بعد ۳ و ۴ و غیره . در این روش انتخاب والدین، به هر فرد در جامعه دو بار اجازه شرکت در تولید مثل داده می شود.

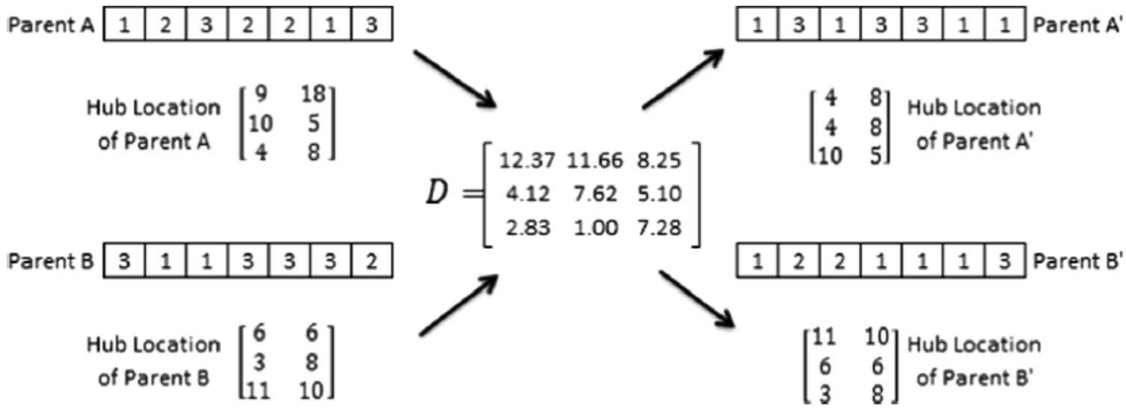
۲-۴-۵ عملگر تقاطع

عملگر تقاطع برای تولید فرزند از طریق ترکیب ژن های والدین استفاده می شود. در اینجا دو عملگر تقاطع متفاوت برای تخصیص گسسته و مکان یابی پیوسته استفاده شده است.

- عملگر تخصیص ژن های مشترک دو والد را حفظ می کند. با این وجود ممکن است جواب های مشابه داشته باشیم. در واقع شماره هاب ها مهم نیست بلکه تخصیص گره ها به هاب ها مهم است. بنابراین قبل از عملگر تقاطع تخصیص باید مجددا کروموزوم ها را شماره گذاری کنیم.بدون شماره گذاری مجدد عملگر تقاطع جواب خوبی از ترکیب والدین برای تولید فرزند را نمی دهد.

  در روش شماره گذاری مجدد ، یک ماتریس فاصله $p \times p$ به نام D از فاصله هاب ها در دو والد بدست می آید. عضو d_{kl} از ماتریس D ، فاصله بین هاب K از والد A و هاب l از والد B است. سپس والد A به عنوان معیار سنجش انتخاب می شود ، هاب های والد B برای بدست آوردن والد B' شماره گذاری مجدد می شوند. برای هاب k در والد A ، نزدیکترین هاب در والد B به صورت $l' = argmin_l\{d_{kl}\}$ پیدا می شود و هاب l' در والد B به نام k شماره گذاری می شود. و در نهایت شماره گزاری مجدد در بردار تخصیص با به روز کردن شماره هاب ها در والد B به شماره های جدید در B' انجام می شود. بنابراین ، به طور کلی B و B' جواب های عینا مثل هم را ارائه می دهند. اما معلوم نیست که کدامیک از والدین اصلی برازندگی بهتری دارند، بنابراین روش شماره گذاری مجدد برای والد دیگر نیز انجام می شود. بنابراین با در نظر گرفتن والد B به عنوان معیار سنجش، هاب های والد A شماره گذاری مجدد می شوند، به عبارت دیگر $k' = argmin_k\{d_{kl}\}$ برای شماره گذاری مجدد هاب k' در A به نام هاب l در A' استفاده می شود.

مثال ۲-۴-۱۶. برای یک مسئله که $n = 7$ و $p = 3$ روش شماره گذاری مجدد در زیر انجام شده است.



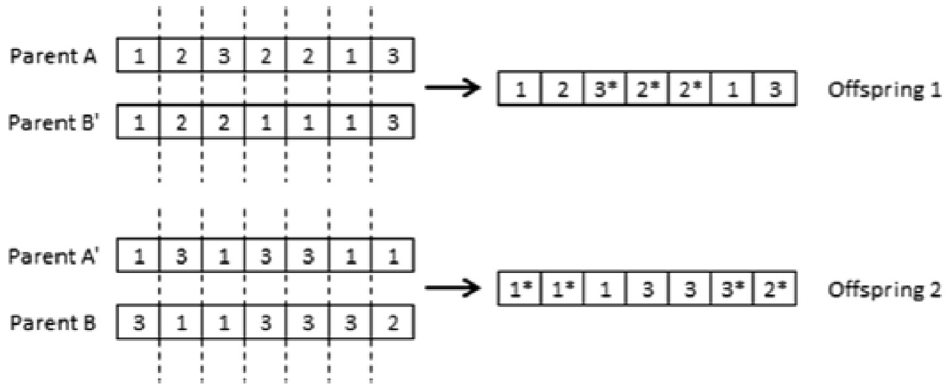
$$\begin{bmatrix} 9 & 18 \\ 10 & 5 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 12.37 & 11.66 & 8.25 \\ 4.12 & 7.62 & 5.10 \\ 2.83 & 1.00 & 7.28 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 4 & 8 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 8 \\ 11 & 10 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 11 & 10 \\ 6 & 6 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

شکل ۲-۱

توجه کنید که والد A' جواب مشابه به والد A را ارائه نمی دهد زیرا برای هر دو هاب ۱ $= l$ و ۲ $= l$ از والد B ، $K' = 3$ است. در این حالت هاب ۳ از والد A برازنده هر دو هاب ۱ و ۲ در A' است. با توجه به این مثال نتیجه می گیریم که روش شماره گذاری مجدد ممکن است کمتر از p هاب داشته باشد. اما جواب نهایی $PHLGA$ دقیقا p هاب و هر هاب حداقل یک اسپوک را به خود اختصاص می دهد.

بعد از اینکه دو والد A' و B' با روش شماره گذاری مجدد هاب ها در دو والد A و B بدست آمدند ، ابتدا تخصیص و سپس عملگر مکان یابی به کار برده می شود. فرزند ۱ از دو والد A و B' و فرزند ۲ از دو والد A' و B تولید می شوند. عملگر تقاطع تخصیص به صورت زیر کار می کند. اگر یک اسپوک به هاب یکسان در هر دو والد تخصیص داده شده باشد ، به طور مستقیم به آن هاب در فرزند تخصیص داده می شود و اگر یک اسپوک به دو هاب متفاوت در دو والد اختصاص داده شده باشد ، پس با احتمال برابر به طور تصادفی یکی از آنها انتخاب می شود. اگر کمتر از P هاب در فرزند وجود داشت ما انتخاب تصادفی هاب های والدین را تکرار میکنیم تا دقیقا P هاب وجود داشته باشد. مثالی از عملگر تقاطع تخصیص در ۲-۲ داده شده است.



شکل ۲-۲: مثالی از تقاطع تخصیص(* ژن هایی که به طور تصادفی از والدین انتخاب شده اند را نشان می دهد)

در عملگر تقاطع مکان یابی ، مکان هاب های فرزند با یک معادله ای از مکان هاب های والدین به وسیله پارامتر μ تعیین می شوند که معادله آن به صورت زیر است:

$$Y_{offspring1} = \mu Y_A + (1 - \mu) Y_{B'} \qquad (۱۱-۲)$$

$$Y_{offspring2} = \mu Y_B + (1 - \mu) Y_{A'} \qquad (۱۲-۲)$$

پارامتر μ به طور تصادفی از توزیع نرمال که میانگین و واریانس ۰/۵ هستند تولید شده است. استفاده از پارامتر μ به جستجوی بهتر فضای جواب برای مکان هاب ها، کمک می کند. برای مثال، مکان هاب k در فرزند ۱ با احتمال ۰/۶۸ روی پاره خط بین Y_{KA} و $Y_{KB'}$ و با احتمال ۰/۳۲ بیرون پاره خط قرار می گیرد. بنابراین، اگر با توجه به مقدار μ ، هر هاب بیرون فضای مستطیل شکل که با اسپوک ها مشخص شده قرار بگیرد، ما پارامتر μ و مکان هاب ها را دوباره مقدار دهی می کنیم تا درون فضا قرار بگیرند.

۲-۴-۶ عملگر جهش

در الگوریتم ژنتیک هدف از عملگر جهش جستجوی فضای جواب ناشناخته است. یعنی با استفاده از جهش سعی میکنیم جواب های جدیدی را با تغییر اجزا جواب با یک احتمال کم بیابیم به طوری که نتوانیم آن ها را در همسایگی های نزدیک جواب های موجود بیابیم. از این رو گفته می شود که هدف از جهش فرار از دام بهینه محلی است. مانند عملگر تقاطع، عملگر های جهش متفاوت برای تخصیص و مکان یابی استفاده شده است. در عملگر تخصیص، اسپوک i به هاب ${k_i}^*$ با کمترین هزینه بوسیله معادله زیر تخصیص می یابد:

$$ {k_i}^* = argmin\{collection_{ik} + distribution_{ki} + \sum_l transfer_{kl}\} \quad (۱۳-۲) $$

$$ where \qquad collection_{ik} = \sum_{j=1}^{n} w_{ij}\alpha_c d(y_k, a_i) \quad (۱۴-۲) $$

$$ distribution_{ki} = \sum_{j=1}^{n} w_{ji}\alpha_d d(y_k, a_i) \quad (۱۵-۲) $$

$$ \sum_l transfer_{kl} = \sum_{j=1}^{n} w_{ij} \sum_{l=1}^{p} \alpha_t d(y_k, y_l) \quad (۱۶-۲) $$

در عملگر مکان یابی، برای تخصیص داده شده، مکان هر یک از هاب ها با روش پیشنهادی ایستر و دوستانش [1] به روز رسانی می شود [۱۹] . همچنین آیکین و براون این روش را برای سهولت به روز رسانی مکان تسهیلات در حال تعامل استفاده کرده اند [۱۶] . این عملگر جهش مکان هاب ها را به کمک معادله زیر به روز رسانی می کند:

$$ y_k^{'} = \frac{\sum_{l\neq k}\left(\frac{2transfer_{kl}y_l}{d(y_k,y_l)^2}\right) + \sum_i\left(\frac{(collection_{ik}+distribution_{ki})y_k}{d(y_k,a_i)^2}\right)}{\sum_{l\neq k}\left(\frac{2transfer_{kl}}{d(y_k,y_l)^2}\right) + \sum_i\left(\frac{(collection_{ik}+distribution_{ki})}{d(y_k,a_i)^2}\right)} \quad (۱۷-۲) $$

در معادله (۲-۱۷) عملگر جهش بیانگر این است که مکان هاب k به مکان اسپوک ها و هاب های دیگر بستگی دارد. این روش شبیه به روش به روز رسانی مرکز [2] در الگوریتم ویزفلد [3] است [۲۰] به طوری که مرکز جدید، ترکیب محدبی از نقاط است که وزن آن ها به صورت فاصله بین مرکز قبلی و نقاط محاسبه شده است. هر دو عملگر جهش تا همگرایی به طور تکراری استفاده می شوند. بنابراین، در $PHLGA$ گام اول برای بهبودی، برای هر هاب فرزند به کار برده می شود. اگر یک فرزند جهش یافته بود، ابتدا عملگر تخصیص و پس از آن عملگر مکان یابی به کار برده شده است. و در نهایت اگر فرزند جهش یافته برازندگی بیشتری داشته باشد جایگزین فرزند اصلی می شود.

[1] Eyster et al [2] center update [3] Weizsfeld Algorithm

۲-۴-۷ جایگزینی نسل

در الگوریتم ژنتیک، اندازه جمعیت ثابت است. بنابراین، باید مشخص شود که پس از تولید فرزندان از والدین انتخاب شده،کدام افراد از نسل فعلی و فرزندان جدید باید در نسل بعد حضور داشته باشند. بنابراین جایگزینی برای تعیین اینکه کدام یک از افراد قرار است در نسل بعدی حیات داشته باشند، استفاده می شود. در $PHLGA$ یک نوع تورنومنت انتخاب بر پایه تابع برازندگی استفاده شده است. بعد از هر تولید مثل، اولین والد و دو فرزند وارد مسابقه می شوند و فرد با بهترین برازش در میان آنها، مطلوب است. از آنجا که هر والد دوبار در معرض تولید مثل است، یک بار به عنوان اولین والد و یک بار به عنوان دومین والد، ما برای جلوگیری از همگرایی زودرس تنها اولین والد را در تورنومنت به حساب می آوریم.

۲-۴-۸ پارامتر های $PHLGA$

یکی از کارهای مهم در زمینه الگوریتم ژنتیک، قرار دادن پارامتر هایی است که ممکن است این پارامتر ها یک اثر مهم روی کار داشته باشند. بنابراین یک الگوریتم ژنتیک با تعدادی پارامتر مطلوب است. $PHLGA$ تنها سه پارامتر دارد. مقدار این پارامتر ها با تجزیه و تحلیل نتایج مقدماتی اجرا تعیین می شود.

- اندازه جمعیت به صورت $min\{np, ۱۰۰\}$ قرار داده می شود. تعداد گره ها و تعداد هاب ها پیچیدگی مسئله را تعیین می کنند ، و افزایش اندازه جمعیت بر این اساس یک روش معمول معقول است. با این حال، ما برای مسئله های بزرگ اندازه جمعیت را ۱۰۰ قرار می دهیم تا زمان انجام محاسبات در سطح معقول قرار بگیرد.
- شرط خاتمه به طور پیش فرض ۳۰۰ نسل تعیین شده است. یعنی الگوریتم هنگامی متوقف می شود که تعداد نسل ها (یا تعداد تکرار ها) به مقدار مفروض ۳۰۰ برسد. این شرط با کشیدن میانگین و بهترین برازندگی از جمعیت نسل و امتحان کردن رفتار همگرایی الگوریتم تعیین می شود. در نهایت باید الگوریتم به یک جواب خوب بدون اتلاف زمان محاسبه همگرا باشد.
- نرخ جهش به طور پیش فرض ۰/۲ قرار داده شده است. در اجراهای مقدماتی ، مشاهده شده است که مقدار کم باعث همگرایی زود رس می شود و مقدار زیاد زمان محاسبات را بدون بهبود بخشیدن به کیفیت جواب افزایش می دهد.

چاچوب کلی الگوریتم در ۲-۱ داده شده است، که در آن P_A و P_B نشان دهنده والد A و B و $o_۱$ و $o_۲$ نشان دهنده فرزند ۱ و ۲ هستند.

الگوریتم ۲-۱ الگوریتم ژنتیک مسئله مکان یابی هاب پلانار PHLGA

```
{p_1, ..., p_{pop-size}} := GENERATE INITIAL POPULATION
repeat
  r(.) := random permutation of 1, ..., pop − size
  for all i = 1 to pop-size do
    P_A := P_{r(i)} and P_B := P_{r(i+1)}
    (P'_A, P'_B) = RENUMBER HUBS (P_A, P_B)
    o_1 := CROSSOVER (P_A, P'_B)
    o_2 := CROSSOVER (P'_A, P_B)
    for all j = 1 to 2 do
      P = rand (0, 1)
      if p ⩽ mutation probability then
        o_{j-mut} := MUTATION(o_j)
        o_j := SELECT BEST (o_{j-mut}, o_j)
      end if
    end for
    SELECT BEST (o_1, o_2, P_A)
  end for
until temination condition is satisfied
return  the best individual
```

۲-۵ نتایج محاسبات

در این قسمت ارزیابی از عملکرد $PHLGA$ از لحاظ کیفیت جواب و زمان محاسبه، ارائه کرده ایم. در قسمت ۲-۵-۱ مقایسه ای از $PHLGA$ با الگوریتم ویزفلد [1] با استفاده از مجموعه داده های شبیه سازی شده ای که مساله مکان یابی هاب را به مساله مکان یابی تسهیلات چند گانه تبدیل می کند، ارائه کرده ایم. همچنین نتایج $PHLGA$ با جواب های $DHLP$ که بوسیله $completeenumeration$ بدست امده اند، مقایسه شده است. و همچنین تاثیر پارامتر های مسئله مانند وزن ها و هزینه های انتقال بررسی شده است. در قسمت ؟؟ نتایج روی مجموعه CAB و AP گزارش شده است و با جواب های $DHLP$ و نتایج الگوریتم مکان یابی - تخصیص که از مقالات بدست آمده است، مقایسه شده است. برنامه های PHLGA و complete enumeration هر دو در متلب با ورژن R2012a کد گذاری شده اند. همچنین همه الگوریتم هایی که در مقایسه استفاده شده است، در محیط های مشابه مجددا کد گذاری شده اند. اجرا ها روی یک کامپیوتر با intel core i7 پردازشگر CPU 3.40 GHz و رم 8 GB انجام شده است.

۲-۵-۱ نتایج برای مجموعه داده های شبیه سازی شده

بر اساس مطالعات صورت گرفته، هیچ مجموع داده ای که جواب های بهینه آن مشخص شده اند وجود ندارد. بنابراین، الگوریتم روی مجموعه داده های شبیه سازی شده که مکان بهینه هاب ها می توانند پیدا شوند، بررسی شده است.

[1] weiszfeld algorithm

۲-۵-۱-۱ مقایسه با جواب بهینه

در این قسمت دو وضعیت متفاوت برای وزن (W_{ij}) استفاده شده است که عبارتند از:

- وزن های واحد
- ورن های تصادفی بدست آمده از توزیع یکنواخت بین ۰ و ۱

مشخصه های نمونه های مسئله در جدول ۲-۳ داده شده است.

Problem	Number of		Weights
	Nodes	Hubs	
$P_{20,2,U}$	20	2	Unit
$P_{30,3,U}$	30	3	Unit
$P_{40,4,U}$	40	4	Unit
$P_{200,2,U}$	200	2	Unit
$P_{300,3,U}$	300	3	Unit
$P_{400,4,U}$	400	4	Unit
$P_{20,2,R}$	20	2	Uniform(1,10)
$P_{30,3,R}$	30	3	Uniform(1,10)
$P_{40,4,R}$	40	4	Uniform(1,10)
$P_{200,2,R}$	200	2	Uniform(1,10)
$P_{300,3,R}$	300	3	Uniform(1,10)
$P_{400,4,R}$	400	4	Uniform(1,10)

شکل ۲-۳: مشخصه های نمونه مسئله های شبیه سازی شده

برای هر نمونه مسئله ای که در جدول ۲-۳ داده شده است، ۵ تکرار از $PHLGA$ اجرا شده است. سپس جواب ویزفلد و بهترین جواب $PHLGA$ بین ۵ تکرار برای همه نمونه های مسئله در جدول ۲-۴ داده شده است. طبق جدول ۲-۴ جواب های $PHLGA$ مشابه جواب های ویزفلد هستند.

Problem instance	Objective function Value	
	Weiszfeld	PHLGA[a]
$P_{20,2,U}$	5928.0927	5928.0928
$P_{30,3,U}$	11,613.7768	11,613.7849
$P_{40,4,U}$	18,919.6466	18,919.6467
$P_{200,2,U}$	6,023,955.0065	6,023,955.0066
$P_{300,3,U}$	14,104,948.6421	14,104,948.6422
$P_{400,4,U}$	24,807,083.6291	24,807,083.6295
$P_{20,2,R}$	33,324.6079	33,324.6081
$P_{30,3,R}$	64,257.6231	64,257.6233
$P_{40,4,R}$	102,901.8776	102,901.8996
$P_{200,2,R}$	33,120,562.6691	33,120,562.6691
$P_{300,3,R}$	77,602,426.6896	77,602,426.6897
$P_{400,4,R}$	136,372,901.7916	136,372,901.7924

شکل ۲-۴: جواب PHLP برای نمونه مسئله های شبیه سازی شده

زمان اجرا برای نمونه مسئله های شبیه سازی شده در جدول ۲-۵ داده شده است. طبق این جدول $PHLGA$ مسئله ها را در زمان معقول حل می کند. حتی برای بزرگترین نمونه مسئله با ۴۰۰ گره، زمان اجرا برای یک تکرار تقریبا ۵۰ دقیقه است. در جواب ویزفلد تخصیص ها داده شده است، اما در $PHLGA$ علاوه بر مکان یابی هاب ها باید گره ها را به هاب ها اختصاص دهد. بنابراین زمان اجرا الگوریتم ویزفلد و $PHLGA$ قابل مقایسه نیستند.

Problem instance	Computation time (s)	
	Weiszfeld	PHLGA[a]
$P_{20,2,U}$	0.0140	30.7447
$P_{20,2,U}$	0.0246	109.7641
$P_{20,2,U}$	0.0339	271.1754
$P_{20,2,U}$	0.4230	1076.9538
$P_{20,2,U}$	0.9365	1909.1330
$P_{20,2,U}$	1.6966	3030.3800
$P_{20,2,U}$	0.2953	29.6056
$P_{20,2,U}$	0.0292	109.4154
$P_{20,2,U}$	0.0462	271.5367
$P_{20,2,U}$	0.4260	1075.9186
$P_{20,2,U}$	0.9461	1907.5554
$P_{20,2,U}$	1.7523	3030.1109

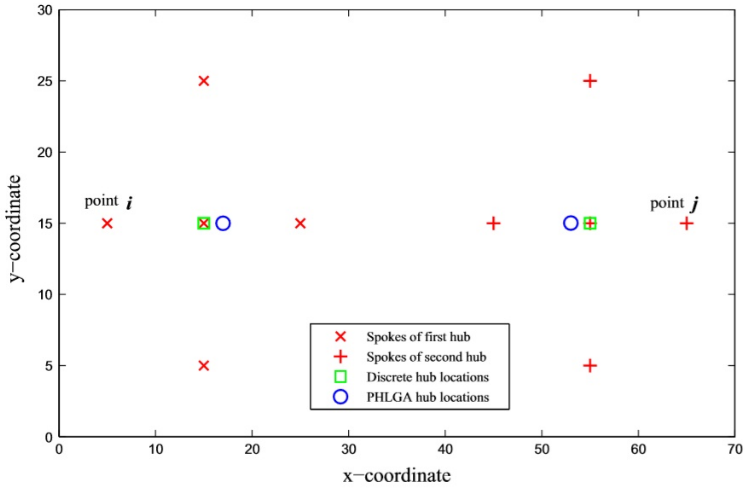
شکل ۲-۵: زمان اجرا PHLGA برای نمونه مسئله های شبیه سازی شده

۲-۵-۱-۲ اثر پارامتر وزن

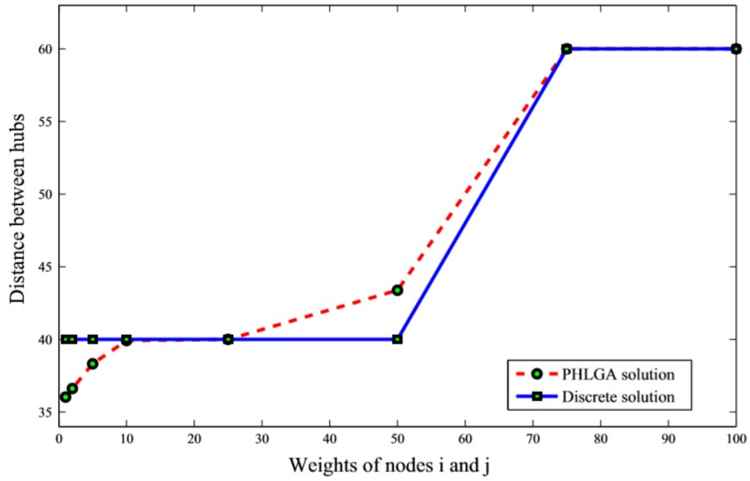
برای تفهیم اثر پارامتر وزن (w_{ij}) که نشان دهنده مقدار جریان بین جفت گره ها است، یک مسئله کوچک با ۱۰ گره و ۲ هاب تولید شده است. این گره ها در دو گروه برابر تقسیم شده اند مانند ۲-۶. پارامتر های هزینه به صورت $\alpha_c = \alpha_d = ۱$ و $\alpha_t = ۰/۵$ قرار داده شده اند. هنگامی که در ابتدا مقدار همه ی وزن ها برابر ۱ باشند جواب $discrete$ و جواب $PHLGA$ در ۲-۶ نشان داده شده اند.

مکان هاب ها همانطور که وزن $w_{ij} = w_{ji}$ افزایش می یابد بر گره های i و j منطبق می شوند. همانطور که در شکل ۲-۷ می بینیم، فاصله بین هاب ها در جواب مسطح $PHLGA$ مرتبا افزایش می یابد و به دو دورترین نقاط نزدیک می شود.

در جواب $discrete$، از آنجایی که یک هاب تنها ممکن است از یک اسپوک به اسپوک دیگری منتقل شود، فاصله یک تابع $stepwise$ است.



شکل ۲-۶

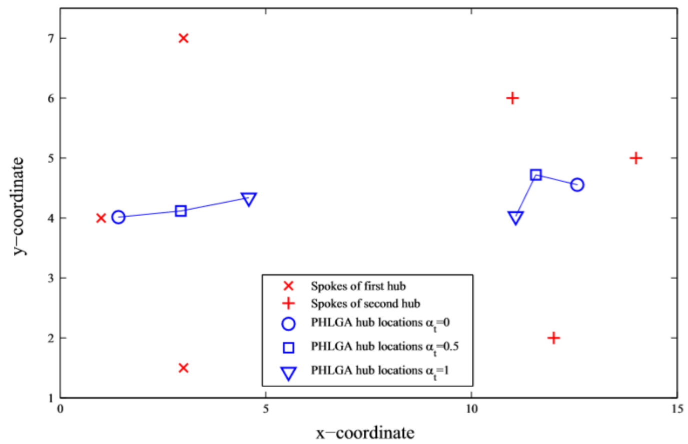


شکل ۲-۷

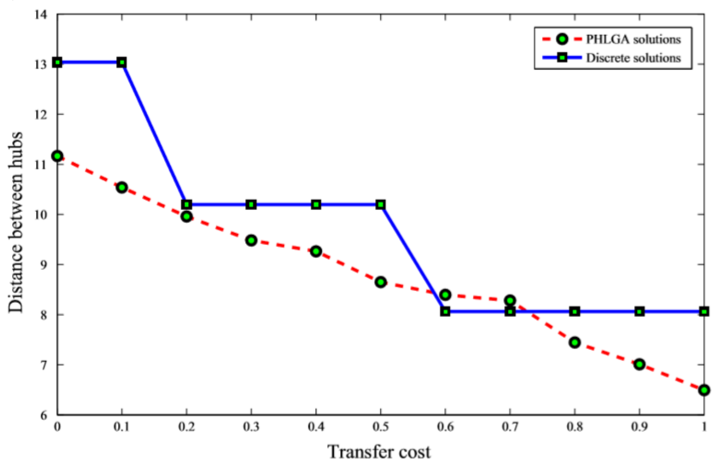
۲-۵-۱-۳ اثر پارامتر های هزینه

برای تفهیم اثر پارامتر های هزینه همانطور که در شکل ۲-۸ نشان داده شده، یک مسئله کوچک با ۶ گره و ۲ هاب تولید شده است.در این مسئله وزن ها از یک توزیع یکنواخت بین ۱ تا ۱۰ تولید شده اند. و پارامتر های هزینه اجتماع و توزیع ۱ $= \alpha_d = \alpha_c$ هستند. در ابتدا مقدار فاکتور تخفیف صفر قرار داده شده است و به تدریج مقدار آن تا ۱ افزایش می یابد. بعضی از جواب ها با تغییر هزینه انتقال (α_t) در شکل ۲-۸ نشان داده شده اند.

در شکل ۲-۹ تغییر فاصله بین هاب ها برای جواب های $PHLP$ و $discrete$ نشان داده شده است.



شکل ۲-۸



شکل ۲-۹

هنگامی که فاکتور تخفیف کاهش می یابد، هاب ها در $PHLP$ به یکدیگر نزدیکتر می شوند، و هزینه انتقال به هزینه های اجتماع و توزیع نزدیکتر می شود.

در $DHLP$ فاصله بین هاب ها به صورت یک تابع stepwise کاهش می یابد، و در $PHLP$ هاب ها به طور پیوسته به یکدیگر نزدیکتر می شوند.

فصل ۳

یک رویکرد خوشه بندی به مسئله مکان یابی هاب مسطح

هدف از خوشه بندی این است که داده های موجود را به چند گروه تقسیم کنند و در این تقسیم بندی، داده های گروه های مختلف باید حداکثر تفاوت ممکن را داشته باشند و داده های موجود در یک گروه باید بسیار به هم شبیه باشند. برخلاف کلاس بندی، در خوشه بندی ، گروه ها از قبل مشخص نمی باشند و همچنین معلوم نیست که بر حسب کدام خصوصیات گروه بندی صورت می گیرد. ئر نتیجه پس از انجام خوشه بندی باید یک فرد خبره خوشه های ایجاد شده را تفسیر کند و در بعضی مواقع لازم است که پس از بررسی خوشه ها بعضی از پارامتر هایی که در خوشه بندی در نظر گرفته شده اند ولی بی ربط بوده و یا اهمیت چندانی ندارند حذف شده و یا جریان خوشه بندی از اول صورت گیرد. پس از اینکه داده ها به چند گروه منطقی و توجیه پذیر تقسیم شدند از این تقسیم بندی می توان برای کسب اطلاعات درمورد داده ها یا تقسیم داده های جدید استفاده کنیم. خوشه‌بندی را می‌توان به عنوان مهم‌ترین روش در یادگیری بدون نظارت در نظر گرفت. در خوشه‌بندی هدف تقسیم کردن داده‌ها به خوشه‌ها به نحوی است که شباهت بین داده‌های هر خوشه حداکثر و تفاوت بین داده‌ها در خوشه‌های متفاوت حداقل باشد. درواقع این هدف، به‌عنوان یک معیار در انجام یک خوشه‌بندی خوب مدنظر است، یعنی نقاطی که در یک خوشه هستند مشابه با یکدیگر، و متفاوت از دیگر خوشه‌ها باشند.

فرض کنید X مجموعه‌ای از داده‌ها باشد که قصد داریم روی آنها خوشه‌بندی را انجام دهیم:

$$X = \{x_۱, x_۲, ..., x_n\}$$

یک خوشه‌بندی m تایی از X ، افزار X به m مجموعه $c_۱, c_۲, ..., c_m$ است که سه شرط زیر را دارا است:

(آ) $c_i \neq \emptyset \quad i = ۱, ۲, ..., m$

(ب) $\bigcup_{i=۱}^{m} c_i = X$

(ج) $c_i \cap c_j = \emptyset \quad , i \neq j \quad , i, j = ۱, ۲, ..., m$

به علاوه بردارهایی که در خوشه c_j هستند به هم دیگر شبیه‌اند و از خوشه‌های دیگر متفاوتند و هر بردار ویژگی تنها به یک خوشه تعلق دارد. بنابراین خوشه به مجموعه‌ای از داده‌ها گفته می‌شود که به هم شباهت داشته باشند.

گام های اساسی که یک متخصص به منظور توسعه خوشه‌بندی باید انجام دهد به شرح زیر است :

(آ) انتخاب ویژگی [۱] : ویژگی‌ها باید به‌طور صحیح انتخاب شوند تا توصیف درستی از الگو به‌دست دهند، یعنی اطلاعات بیشتری درخصوص آن فعالیت به‌دست آوریم و اطلاعات زائد را از میان ویژگی‌هایی که هدف اصلی ماست، حذف کنیم.

(ب) میزان نزدیکی [۲] بین الگوها: این اندازه کمیتی است که مشابه یا غیر مشابه بودن دو بردار ویژگی را نشان می دهد.

(ج) محک خوشه‌بندی [۳] : محک خوشه‌بندی یا تابع هزینه به تعبیری میزان معقول [۴] بودن خوشه‌ها است و از یک نگاه تابعی است که با بهینه کردن آن روی داده‌ها، داده‌ها در خوشه‌های معقول قرار می‌گیرند. اشاره به این نکته ضروری است، نمونه هایی با d ویژگی طبق یک محک ممکن است در خوشه‌هایی معقول قرار بگیرند درحالی که از نگاه دیگر با یک معیار یا محک دیگر آن چنان معقول نباشد. محک خوشه‌بندی می تواند به‌وسیله تابع هدف یا برخی قواعد دیگر بیان گردد.

(د) الگوریتم خوشه‌بندی: الگوریتم خوشه‌بندی به اندازه نزدیکی و محکی که انتخاب می‌کنیم، بستگی دارد. دراین گام یک الگوریتم که موفق به خوشه‌بندی داده‌ها شود و مبتنی بر تابع هزینه روش می‌باشد، ارائه می‌گردد.

(ه) اعتبار نتایج [۵] : باید صحت و درستی نتایجی که از یک الگوریتم خوشه‌بندی به‌دست آمده است، بررسی شود. به‌عبارتی معیارهایی برای بررسی عملکرد خوشه‌بندی وجود دارد که نشان می‌دهد در روش خوشه‌بندی مورد نظر به چند جنبه خوشه‌بندی توجه شده است. مثلا ممکن است پس از اجرای الگوریتم، یکنواختی خوشه به عنوان معیار به‌کار رفته اما نامتجانس بودن خوشه‌ها مورد توجه قرار نگرفته باشد.

---
[۱] Feature selection [۲] Proximity measure [۳] Clustering criterion [۴] sensible [۵] Validation of the results

(و) تفسیر نتایج [1] : در اکثر موارد، متخصص باید نتایج خوشه‌بندی را با دیگر شواهد تجربی به منظور به‌دست‌آوردن نتایج درست، مقایسه و تحلیل کند.

۳-۱ تاریخچه‌ای از مسأله خوشه‌بندی

خوشه‌بندی [2] یکی از ابتدایی‌ترین فعالیت‌های ذهنی بشر است که برای استخراج مفهوم یا به بیانی دیگر خلاصه‌سازی اطلاعات استفاده می‌شود. این مفهوم در علوم مختلفی مانند علوم زیست شناسی و جانورشناسی، جغرافیا و زمین شناسی، جامعه شناسی و باستان شناسی، علوم روانپزشکی و آسیب شناسی، تجارت، سیستم‌های مهندسی و پردازش تصویر به‌کار برده شده است. خوشه‌بندی با توجه به زمینه ای که درآن استفاده می‌شود، نام‌های متفاوتی پیدا کرده است مانند یادگیری بدون ناظر در تشخیص الگو [3] ، رده‌بندی جانوران در زیست شناسی، گونه‌شناسی در علوم اجتماعی و افراز در نظریه گراف.

۳-۱-۱ کاربرد خوشه‌بندی

خوشه‌بندی در تشخیص الگوی بدون ناظر، بینایی ماشین، تقطیع تصویر [4] کاربرد فراوان دارد. یکی از اهداف شناسایی الگو، خوشه‌بندی داده‌هاست. از جمله کاربردهای مهم تشخیص الگو در علوم پزشکی است. طی سال‌های گذشته اطلاعات بسیاری از بیماران و تشخیص نهایی و نتیجه درمان آن‌ها ذخیره شده است. الگوهای مهمی درون این اطلاعات نهفته است که از چشم انسان دور مانده است. با الگوریتم‌های خوشه‌بندی می‌توان این اطلاعات را از درون داده‌ها استخراج کرد که در تشخیص بیماری‌ها به پزشکان کمک می‌کند.

۳-۲ تجزیه و تحلیل خوشه ای

تعریف ۳-۲-۱. تجزیه و تحلیل خوشه نوعی روش آماری است که به دنبال گروه بندی کردن نقاط داده هایی هستند که در بعضی موارد به هم نزدیک اند.

[1] Interpretation of the results [2] clustering [3] Pattern recognition [4] Image segmentation

نیاز برای تفکیک ژئواستاتیکی مجموعه ها از طریق تجزیه و تحلیل خوشه ای در نتیجه موارد زیر رخ می دهد:

- ??????????????????????????
- زمانی که سایز مجموعه ی در حال مطالعه بسیار بزرگ باشد???????????????

موارد بسیار قابل توجهی بین تجزیه و تحلیل خوشه ای غیر سلسه مراتبی (CA) و تخصیص مکان (LA) وجود دارد. به عنوان مثال، (CA) یک فرمول مربع فاصله اقلیدسی را بکار می برد و معمولا مشاهدات را به صورت عبارات چند متغیره توصیف می کند. خروجی تجزیه و تحلیل خوشه شامل میانگین خوشه ها است و مشخص می کند که هر مشاهده عضو کدام خوشه است. مشاهدات کلاس بندی نشده ممکن است با اندازه گیری فاصله به نزدیک ترین مرکز اختصاص داده شوند. از طرف دیگر، تخصیص مکان (LA) می تواند به عنوان یک ژئواستاتیک خاص کاربردی (CA) در نظر گرفته شود که در آن مشاهدات با مختصاتشان در یک فضای دوبعدی مشخص می شوند. نتایج (LA)، مکان تسهیلات و تخصیص نقاط تقاضا به تسهیلات است. شباهت واضحی بین مفاهیم مرکز/عضویت در خوشه ها در (CA) و مفاهیم مکان یابی تسهیلات/تخصیص در (LA) وجود دارد. قدرت برنامه (CA) به اندازه است که می تواند مسائل نسبتا بزرگ را حل کند. همچنین شرایط درجه اول خطی یک ویژگی مناسب از فرمول "کمینه مربع فاصله اقلیدسی" می باشد. این مزیت مربع فواصل در مدل های مکان یابی قبلی نیز استفاده شده است. بسیاری از مدا های مکان یابی با روش های دقیق حل می شوند و اگر چه روش های دقیق در ادبیات (CA) نیز به خوبی شناخته شده است. در این فصل برنامه جدیدی با استفاده از روش تجزیه و تحلیل خوشه به یک مسئله سخت مکان یابی یعنی مدل مکان یابی هاب مسطح ارائه داده می شود.

۳-۳ مقدمه

مسئله‌ای که در این فصل مورد بحث است به این شرح است که مجموعه‌ای از n نقطه که در فضای دو بعدی با یکدیگر در تعاملند را در نظر بگیرید. مشاهدات دو به دو و مستقلا بر روی هم تاثیر می گذارند. هدف، خوشه‌بندی n نقطه به P گروه است، به طوری که جمع مربع انحرافات از میانگین خوشه‌ها تا حد امکان کم باشد. یک ویژگی مفید مسئله استفاده از مربع فاصله‌ها است که یک سیستم خطی از معادلات را برای مختصات مراکز خوشه‌ها نتیجه می‌دهد. این معادلات به صورت تکراری برای مجموعه‌ای از تخصیصات خوشه‌ها مشتق شده و حل می‌شوند. سپس دنباله‌ای از تخصیصات دوباره مشاهدات، بین خوشه‌ها انجام می‌شود. کاربردی از این مسئله در مسئله مکان

یابی هاب مسطح است زمانی که مشاهدات متعامل، سیستمی از شهرها باشند و تاثیرات متقابل نشانگر سطوح جریان یا حرکت بین موجودیت‌ها را نشان می‌دهند. مسئله مکان یابی هاب مسطح به مسائلی با کمتر از ۱۰۰ گره محدود شده است.استفاده از فرمول مربع فواصل، راه‌حل سریعی از سیستم‌های بزرگ با ۲۵۰ گره و چهار گروه را میسر می‌کند. این فصل دارای مثال هایی گویا و نتایج محاسباتی برای سیستم هایی با بیش از ۵۰۰ مشاهده و ۹ خوشه است.

۴-۳ الگوریتم خوشه‌بندی برای مدل مکان یابی هاب مسطح

فرض کنید n داده داریم که بر هم تاثیر دارند. واحدهای مشاهدات می‌توانند شهرها یا گره‌ها در یک شبکه، و یا اعضای یک گروه فرهنگی یا کلوب باشند. تعاملات خارجی بین این گره‌ها در یک ماتریس W با مولفه‌های w_{ij} جایگذاری می‌شوند. هر نقطه مشاهده در فضایی دو بعدی با مختصات (X_i, Y_i) مشخص می‌شود. مسئله، خوشه‌بندی مشاهدات به گروه‌هایی است به گونه‌ای که جمع مربع فواصل اعضای گروه‌ها از میانه‌ی گروه کمینه شود. علاوه بر این، از آنجا که مطلوب است تا مشاهدات با تعامل بالا را در یک گروه قرار دهیم، فرض می‌شود که جریمه اختصاص دادن مشاهده i به گروه g و مشاهده j به گروه h یک تابع افزایشی از فاصله بین مرکز گروه و سطح تعامل w_{ij} است. به طور خاص، هزینه اختصاص iبه g و j به h مطابق فرمول زیر است:

$$p\left[i(g), j(h)\right] = w_{ij}\left(d_{ig} + d'_{gh} + d_{hj}\right) \qquad (۱-۳)$$

به طوری که:

w_{ij}	سطح تعامل است
d_{ig}	مربع فاصله i از مرکز خوشه g است
d_{hj}	مربع فاصله j از مرکز خوشه h است
d'_{gh}	مربع فاصله مرکز خوشه ها است

فرض می‌کنیم (X_g, Y_g) مرکز گروه g برای $g = ۱, \ldots, p$ باشد. فواصل به این صورت تعریف می شوند:

$$d_{ig} = (x_i - x_g)^۲ + (y_i - y_g)^۲$$

برای همه $i = ۱, \ldots, n$ و $g = ۱, \ldots, p$ و

$$d'_{gh} = (x_g - x_h)^۲ + (y_g - y_h)^۲$$

برای همه $h, g = ۱, \ldots, p$. در قسمت اول هدف انتخاب (X_g, Y_g) $g = ۱, \ldots, p$ به گونه ای است که

$$\min T = \sum_i \sum_j w_{ij} \sum_g \sum_h K_{ijgh} D_{ijgh} \qquad (۲-۳)$$

به طوری که K_{ijgh} مقدار ۱ می گیرد اگر i به گروه g و j به گروه h متعلق باشد، و در غیر این صورت مقدار ۰ می گیرد. و همچنین

$$D_{ijgh} = d_{ig} + d'_{gh} + d_{hj}$$

توجه داشته باشیم که مقادیر صحیح K_{ijgh} از محدودیت زیر پیروی می کند:

$$K_{ijgh} = X_{ig} X_{jh} \qquad (۳-۳)$$

به طوری که مقادیر X متغیر های تخصیص هستند یعنی:

$$\sum_j X_{ij} = ۱ \qquad \text{for all} i \qquad \text{and} \quad X_{ij} = \text{۰یا۱}$$

فرض می‌کنیم که مشاهدات به تنها یک خوشه اختصاص داده می شوند، به طوری که برای هر مشاهده نیاز داریم که تمام تعاملات آن با مشاهدات دیگر توسط همان خوشه انجام شود.در کاربرد مسئله برای شبکه های هاب اسپوک، این احتمال وجود دارد که این محدودیت ریلکس شود. کمپبل در تحقیقات اخیرش [۲۱، ۳] فرمول مدل تخصیص چند گانه را تولید کرده است و نشان داده است که با مسئله مکان یابی $P-$میانه $(P - Median)$ مرتبط است. . میدانیم که D_{ijgh} یک معیار اندازه گیری فاصله i از گروه g و j از گروه h و فاصله بین گروه های g و h است که با یک وزن که سطح تعامل بین i و j را نشان می دهد، ضرب شده است. این واقعیت که فاصله " مربع " پایه ای برای D_{ijgh} است، فرضیه ای است که باید مورد تایید قرار گیرد. در مورد تجزیه و تحلیل خوشه، اندازه گیری مربع فاصله مورد پذیرش است، اما در هاب و برنامه های اسپوک مشخص نیست که مربع فاصله جایگزین خوبی برای هزینه های حمل و نقل باشد. یک روش ممکن برای بررسی صحت

این است که جواب بهینه برای مسائل با مربع فاصله محاسبه شود و این جواب $Z^۲$ نامیده شود، سپس تابع هدف برای فواصل غیر مربع با استفاده از مکان یابی و تخصیص ارزیابی شود، این مقدار $Z^۱ \mid Z^{۲(LA)}$ نامیده شود. سپس، مقادیر بهینه برای متغیر های مکان یابی با استفاده از تابع هدف غیر مربع محاسبه شود، اما متغیرهای تخصیص راه حل $Z^۲$ ثابت نگه داشته می شود و این مقدار $Z^۱ \mid Z^{۲(A)}$ نامیده شود. سرانجام جواب بهینه واقعی مسئله فاصله غیر مربعی محاسبه می شود و این مقدار $Z^۱$ نامیده می شود. واضح است که $Z^۱ \le Z^۱ \mid Z^{۲(A)} \le Z^۱ \mid Z^{۲(LA)}$. توجه داشته باشید که $Z^۱ \mid Z^{۲(A)}$ بهتر از $Z^۱ \mid Z^{۲(LA)}$می باشد زیرا مکان ها ممکن است طوری قرار بگیرند که فواصل طولانی تر باشند، که این باعث می شود که تابع هدف مربع فواصل مقدارش افزایش بیابد. همچنین، $Z^۱$ بهتر از $Z^۱ \mid Z^{۲(A)}$ می باشد زیرا ؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟ اکنون بررسی می شود که چگونه $Z^۱ \mid Z^{۲(A)}$ و $Z^۱ \mid Z^{۲(LA)}$ به عنوان یک تخمین $Z^۱$ عمل می کنند. در موارد خاص، اختلاف ممکن است کوچک باشد، و بنابراین روش مربع فاصله، پایه ای برای یک ابتکار عالی برای مسائلی که سخت تر است را فراهم می کند. متاسفانه، در حالی که $Z^۱ \mid Z^{۲(A)}$ نیاز به یک راه حل نسبتا آسان از از یک سیستم نامعادلات غیر خطی دارد، و $Z^۱ \mid Z^{۲(LA)}$ یک مسئله ساده ارزیابی است، هنوز نمی شود در مورد اندازه این اختلاف ها نظر داد، از آنجایی که روش دقیق عملی برای مسئله اصلی $Z^۱$ وجود ندارد. تحقیقات آینده احتمالا به این سمت است که اکتشافات مبتنی بر $Z^۲$ یک نقطه شروع خوب برای مسئله بسیار دشوار $Z^۱$ باشد.

برای بخش اول تجزیه و تحلیل که به شرح زیر است، فرض می شود که K_{ijgh} تعیین شده است و این معادل شروع مسئله با یک تفکیک مشاهدات بین p خوشه است. در قسمت های بعد، در مورد تخصیص مجدد مشاهدات به خوشه ها بحث می کنیم. یک ویژگی مفید این مسئله این است که استفاده از فاصله مربع، یک سیستم خطی معادلات برای مختصات مراکز خوشه ها تولید می کند. این معادلات مشتق شده و در زیر حل می شوند. مفهوم این موارد این است که هنگامی که یک تفکیک داده شود، میانگین گروه به راحتی محاسبه می شود.تنها چیزی که لازم است حل یک دستگاه p معادله برای هر کدام از ابعاد فضای نمونه است. این مزیت اصلی استفاده از فرمول مربع فاصله اقلیدسی قبلا در مدل وایت برای مکان یابی تسهیلات [1] استفاده شده است. امر مهم دیگری، برای بدست آوردن روشی خوب برای بررسی تخصیص مجدد مشاهدات به خوشه ها باقی مانده است. که در این قسمت به آن می پردازیم. همانطور که در برخی مطالعات داریم، نمی توان فرض کرد که جواب در مجموعه بخش‌های غیرهمپوشان گره‌ها گنجانده شود. به عنوان مثال، سیستمی از $n = n_۱ + n_۲$ گره را در نظر بگیرید به طوری که زیرسیستم های $n_۱ * n_۱$ و $n_۲ * n_۲$ در میان خود بسیار تعاملی هستند، اما زیر سیستم‌های $n_۱ * n_۲$ و $n_۲ * n_۱$ تنها شامل تعاملات صفر هستند.

[1] facility location

اگر گره های n_1 و n_2 به صورت گرافیکی ترسیم شوند، کاملا تصادفی است اگر تمام گره های n_1 و n_2 با یک بخش غیرهمپوشان جدا شوند. به این معنا که هیچ الزام نزدیکی برای مراکز تعامل وجود ندارد، هیچ تضمینی وجود ندارد که یک خوشه باید تنها گره‌های مجاور را شامل شود. در حالی که مسئله خوشه‌بندی متعارف به چندین گروه، یک بخش با این ویژگی تولید می‌کند که تمام مشاهدات نزدیک به مرکز A نسبت به مرکز B به همان گروه اختصاص داده می شوند، این یک ویژگی از مسئله هابِ در حال تعامل نیست. بنابراین، نمی توانیم از استراتژی بررسی بخش های غیرمتداخل استفاده کنیم و نمی توانیم از شیوه ابتکاری مرسوم $ALTERNATING$ برای تفکیک مجدد مشاهدات به ترتیب استفاده کنیم. همانطور که توسط $Aykin$ و $Brown$ پیشنهاد شده، یک روش جایگزین استفاده از الگوریتم‌های مبادله است. آنها متوجه شدند که مسئله برای یک بخش معین از گره ها به یک مسئله چند وجهی وبر کاهش می یابد. سپس روش $Cooper$ به طور تکراری مورد استفاده قرار می گیرد تا به مکان وجه‌ها برسد. نتایج به سیستم های تعاملی نسبتا کوچک محدود می شوند و او معتقد است که بزرگترین مسئله حل شده تا به امروز که در آن از این دستورالعمل استفاده شده است، به صورت $n = 60$ و $p = 20$ است و این مسئله با پردازشگر $VAX8530$ بیش از ۳۰ دقیقه طول کشیده است. هرچند مسائل کوچکتر مانند $n = 20$ و $p = 4$ حدود ۳ ثانیه طول کشیده است. در این مورد، انگیزه اصلی این است که از تالیفات حوزه خوشه‌بندی راهنمایی گرفته شود و برای حل مسائل بزرگ با صدها مشاهده تلاش شود. برای رسیدن به این هدف، بر روی فرمول بندی مناسب از مسافت با مربع فاصله اقلیدسی تأکید شده است.

۳-۵ روش حل الگوریتم

یادآوری می‌کنیم که D_{ijgh} مجموع فواصل نقاط درونی با مراکز خوشه ها و فواصل مراکز خوشه ها است. بنابراین هدف این است که:

$$\min_{(x_1,y_1)\dots(x_p,y_p)} T = \sum_i \sum_j w_{ij} \sum_g \sum_h K_{ijgh} D_{ijgh} \qquad (۳-۴)$$

می دانیم که $\frac{\partial d_{ig}}{\partial x_g} = -2(x_i - x_g)$ اما اگر $g \neq h$ آنگاه $\frac{\partial d_{ig}}{\partial x_h} = 0$ به طور مشابه $\frac{\partial d_{ig}}{\partial y_g} = -2(y_i - y_g)$ اما اگر $g \neq h$ آنگاه $\frac{\partial d_{ig}}{\partial y_h} = 0$ به علاوه $\frac{\partial d'_{gh}}{\partial x_g} = 2(x_g - x_h)$، $\frac{\partial d'_{gh}}{\partial y_g} = 2(y_g - y_h)$. در نهایت $\frac{\partial d'_{gh}}{\partial x_h} = -2(x_g - x_h)$، $\frac{\partial d'_{gh}}{\partial y_h} = -2(y_g - y_h)$.

ترکیب این مشتقات با تعاریف D_{ijgh} به شرح زیر است:

$$\frac{\partial D_{ijgh}}{\partial x_k} = \begin{cases} ۰ & \text{if}(g=h) \neq k \\ -۲(x_i - x_k) - ۲(x_j - x_k) & \text{if} g=h=k \\ ۰ & \text{if} g \neq h, g \neq k, h \neq k \\ -۲(x_i - x_k) + ۲(x_k - x_h) & \text{if} g \neq h, g = k \\ -۲(x_i - x_k) + ۲(x_k - x_g) & \text{if} g \neq h, h = k \end{cases}$$

جایگزینی مشتقات:

$$\frac{\partial T}{\partial x_k} = \sum_i \sum_j w_{ij} \sum_g \sum_h k_{ijgh} (\frac{\partial D_{ijgh}}{\partial x_k}) \qquad k = ۱, \ldots, p \tag{A.۱}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y_k} = \sum_i \sum_j w_{ij} \sum_g \sum_h k_{ijgh} (\frac{\partial D_{ijgh}}{\partial y_k}) \qquad k = ۱, \ldots, p \tag{A.۲}$$

مولفه اصلی محاسبات $\sum_g \sum_h k_{ijgh} (\frac{\partial D_{ijgh}}{\partial x_k})$ است، که هم اکنون ساده می شود. مشخصا $\frac{\partial D_{ijgh}}{\partial y_k} = ۰$ اگر نه g و نه h برابر k باشند. بنابراین $\sum_g \sum_h k_{ijgh} (\frac{\partial D_{ijgh}}{\partial x_k})$ با قرار دادن $g = k$ و $h = k$ به نوبه خود می تواند محاسبه شود:

$$\begin{aligned} I_{ij} = & \sum_g \sum_h k_{ijgh} (\frac{\partial D_{ijgh}}{\partial x_k}) \\ = & \sum_{h \neq k} k_{ijgh} (\frac{\partial D_{ijkh}}{\partial x_k}) + \sum_{g \neq k} k_{ijgk} (\frac{\partial D_{ijgk}}{\partial x_k}) + k_{ijkk} \frac{\partial D_{ijkk}}{\partial x_k} \end{aligned} \tag{A.۳}$$

سپس،

$$\begin{aligned} I_{ij} = & \sum_{h \neq k} k_{ijkh} \Big(-۲(x_i - x_k) + ۲(x_k - x_h) \Big) \\ & + \sum_{g \neq k} k_{ijgk} \Big(-۲(x_j - x_k) + ۲(x_k - x_g) \Big) \\ & + k_{ijkk} \Big(-۲(x_i - x_k) - ۲(x_j - x_k) \Big) \end{aligned} \tag{A.۴}$$

و از طریق بررسی دقیق می بینیم که آخرین عبارت می تواند در دو مجموع اول جذب شود. در

نهایت، مجموع همه عبارت های آخر، می بینیم که مشتقات جزئی زیر باید به صفر برسد.

$$\frac{\partial T}{\partial x_k} = \sum_i \sum_j w_{ij} \Big\{ \sum_h k_{ijkh} \big(-۲(x_i - x_k) + ۲(x_k - x_h) \big) + \sum_g k_{ijgk} \big(-۲(x_j - x_k) + ۲(x_k - x_g) \big) \Big\} = ۰ \qquad (A.۵)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y_k} = \sum_i \sum_j w_{ij} \Big\{ \sum_h k_{ijkh} \big(-۲(y_i - y_k) + ۲(y_k - y_h) \big) + \sum_g k_{ijgk} \big(-۲(y_j - y_k) + ۲(y_k - y_g) \big) \Big\} = ۰ \qquad (A.۶)$$

در ادامه کار با $\frac{\partial T}{\partial x_k}$ برای جدا کردن عبارت x_k تقسیم طرفین بر ۲ و مرتب سازی مجدد، می بینیم که $\frac{\partial T}{\partial x_k} = ۰$ اشاره دارد بر اینکه

$$\sum_i \sum_j w_{ij} \Bigg\{ \sum_h K_{ijkh}(۲x_k - x_h) + \sum_g K_{ijgk}(۲x_k - x_g) \Bigg\} = s_k(x) \qquad (A.۷)$$

که $s_k(x) = \sum_i \sum_j w_{ij} \Big\{ \sum_h k_{ijkh}(x_i) + \sum_g k_{ijgk}(x_j) \Big\}$ یک ثابت است، برای یک تفکیک داده شده از مشاهدات درون خوشه ها. یک ثابت مشابه از $\frac{\partial T}{\partial y_k} = ۰$ محاسبه شده است. جدا کردن x_k نسبتا ساده است: از معادله قبلی داریم

$$\sum_h (۲x_k - x_h) \sum_i \sum_j w_{ij}(k_{ijkh} + k_{ijhk}) = s_k(x) \qquad (A.۸)$$

بنابراین

$$x_k ۲ \Bigg(\sum_h \sum_i \sum_j w_{ij}(k_{ijkh} + k_{ijhk}) \Bigg) - \sum_h x_h \Bigg(\sum_i \sum_j w_{ij}(k_{ijkh} + k_{ijhk}) \Bigg) = s_k(x) \qquad (A.۹)$$

که $s_k(x) = \sum_i \sum_j w_{ij} \Big\{ \sum_h k_{ijkh}(x_i) + \sum_g k_{ijgk}(x_j) \Big\}$ یک ثابت است. با تعاریف مناسب از ضرایب a_k و b_{kh}، دستگاه معادلات زیر بدست می آیند. بنابراین x_k از دستگاه زیر

حل می شود:

$$\begin{pmatrix} a_۱ - b_{۱۱} & -b_{۱۲} & \dots & -b_{۱p} \\ -b_{۲۱} & a_۲ - b_{۲۲} & \dots & -b_{۲p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -b_{p۱} & -b_{p۲} & \dots & a_p - b_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_۱(x) \\ s_۲(x) \\ \vdots \\ s_p(x) \end{pmatrix} \tag{۳-۵}$$

که

$$a_k = ۲ \sum_h \sum_i \sum_j w_{ij}(k_{ijkh} + k_{ijhk})$$

$$b_{kh} = \sum_i \sum_j w_{ij}((k_{ijkh} + k_{ijhk})$$

$$s_k(x) = \sum_i \sum_j w_{ij} \left\{ \sum_h k_{ijkh}(x_i) + \sum_g k_{ijgk}(x_j) \right\}$$

یک دستگاه مشابه از معادلات با مقادیر سمت راست متناظر

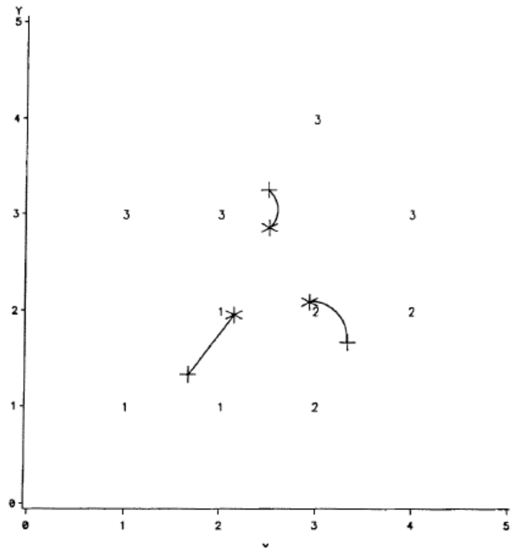
$$s_k(y) = \sum_i \sum_j w_{ij} \left\{ \sum_h k_{ijkh}(y_i) + \sum_g k_{ijgk}(y_j) \right\}$$

برای مولفه y مرکز خوشه ها، داریم:

$$\begin{pmatrix} a_۱ - b_{۱۱} & -b_{۱۲} & \dots & -b_{۱p} \\ -b_{۲۱} & a_۲ - b_{۲۲} & \dots & -b_{۲p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -b_{p۱} & -b_{p۲} & \dots & a_p - b_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_۱ \\ y_۲ \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_۱(y) \\ s_۲(y) \\ \vdots \\ s_p(y) \end{pmatrix} \tag{۳-۶}$$

۳-۶ حل یک مسئله

به عنوان یک مثال از روش هایی که در بخش قبل توضیح داده شد، یک نمونه عددی کوچک ارائه داده شده است. ده نقطه تعامل را در شکل یک در نظر می گیریم. فرض می کنیم این نقاط به خوشه هایی که در جدول یک نشان داده شده، اختصاص دارند.



شکل ۳-۱: مشاهدات و مراکز خوشه ها

point	x_i, y_i	Allocated to group
۱	۱،۱	۱
۲	۲،۱	۱
۳	۳،۱	۲
۴	۴،۲	۲
۵	۲،۲	۱
۶	۳،۲	۲
۷	۴،۳	۳
۸	۱،۳	۳
۹	۲،۳	۳
۱۰	۳،۴	۳

جدول ۳-۱: نقاط داده ها و نمونه جواب

با استفاده از دستگاه های مختصات (۳-۵) و (۳-۶) ماتریس ضرایب را برای این سیستم بدست آورده ایم، که به صورت زیر است:

$$A = \begin{pmatrix} ۸۸۴ & -۱۲۶ & -۲۶۸ \\ -۱۲۶ & ۱۰۲۴ & -۳۰۸ \\ -۲۶۸ & -۳۰۸ & ۱۶۹۶ \end{pmatrix}$$

g	$S_g(x)$	$S_g(y)$	x_g	y_g
1	850	700	2.140422	1.95328
2	1960	1010	2.932368	2.084222
3	2780	3670	2.509907	2.851073

در تفکیک به صورت مشخص شده، گره ها به شدت با گروه سوم تعامل دارند، بنابراین انتظار می رود که مرکز گروه ها به سمت اعضای گروه ۳ کشیده شوند، که این موضوع در شکل ۱ واضح است. مراکز قراردادی هر دو گروه که به سادگی با داشتن میانگین مختصات x و y اعضای گروه ها بدست می آیند، با علامت $+$ مشخص شده اند. همچنین مراکز محاسبه شده با فرمول تعاملی با علامت $*$ مشخص شده اند.

در بخش بعدی به تخصیص مجدد نقاط به خوشه ها می پردازیم.

۳-۷ تخصیص مجدد

نتایج تاکنون بر روی مجموعه ای از متغیر های عدد صحیح داده شده K_{ijgh} پیش بینی شده بودند که نشان می دهد i و j به کدام خوشه ها اختصاص داده شده اند. لازم است که جواب ها از نظر این متغیر های تخصیص بررسی شوند. شمارش کامل غیر ممکن است. بنابراین، روشی توسعه یافته است که اختصاص مشاهدات به خوشه های مختلف دیگر را می آزماید و جستجو می کند تا تفکیک های خوبی از مشاهدات را بیابد.

فرض کنید p_g لیستی از مشاهدات باشد که به خوشه g اختصاص داده شده اند. و همچنین n_g تعداد گره های اختصاص داده شده به خوشه g باشد، که با تعداد عناصر موجود در p_g متناظر است.

برای h نابرابر با g، تخصیص مجدد گره ها از خوشه g به خوشه h را در نظر می گیریم. این تخصیص مجدد به روش زیر تعریف می شود. فرض کنید

$$P_g^- = P_g - \{i\} \qquad (۳-۷)$$

$$P_h^+ = P_h + \{i\} \quad \text{برای } h \text{ نابرابر با } g \qquad (۳-۸)$$

بنابراین می توان مجموعه ای از همه انتقال های تک مبادله را با ارزیابی P_g^- و P_h^+ برای همه i، g و h مناسب تولید کرد. برای انجام تخصیص مجدد باید گره اختصاص داده شده به هر خوشه ای را

در نظر بگیریم و چیز های دیگر را ثابت نگه داریم، مجددا این گره را به هر یک از خوشه های دیگر اختصاص می دهیم. می دانیم n_g تعداد گره های اختصاص داده شده به خوشه g است. هر کدام از این گره ها به $p - ۱$ خوشه دیگر قابل تخصیص اند. به طوری که با انجام این کار برای هر خوشه به نوبه خود، تعداد تخصیص های مجدد برابر است با $\sum_g n_g(p - ۱) = n(p - ۱)$

۸-۳ روش های تخصیص مجدد

تخصیص مجدد در دو روش مختلف سازمان دهی شده است، به طوری که در روش اول هر بار که یک تخصیص مجدد آزمایشی انجام می شود، میانگین خوشه ها را دوباره تخمین می زند، و در روش دوم، قبل از اینکه تخصیص مجدد را مد نظر بگیرد، مراکز را معین می کند. در ادامه به جزئیات این دو روش می پردازیم.

روش ۱

از آنجایی که مراکز خوشه ها به طور چشم گیری وابسته به مشاهدات اختصاص یافته به هر خوشه است، واضح است که مراکز خوشه باید هر بار مجددا محاسبه شود. هر بار که یک مشاهده مجددا به یک خوشه دیگر اختصاص داده می شود، مراکز دوباره محاسبه می شود، که این کار زمان بر است زیرا دستگاه های معادلات خطی در هر مرحله به طور مرتب حل می شوند. برای کاهش بار محاسبات، کار بسیاری نمی توان انجام داد. متغیر های عدد صحیح k با هر انتقال نیازی نیست کاملا ارزیابی مجدد شوند. محاسبات دقیق به ما امکان می دهد که به محض اینکه مشاهده i از خوشه g به خوشه h منتقل شوند متغیر های عدد صحیح را بروز رسانی کنیم. با وجود اینکه این روش برای تجزیه و تحلیل خوشه ای از نظر محاسباتی سنگین است، مزیتش این است که هدف همیشه با توجه به میانگیت خوشه اصلاح شده اش سنجیده می شود. بنابراین،هر ارزیابی تابعی با استفاده از مراکز خوشه مناسب انجام می شود.

روش ۲

این روش نسبت به روش ۱ ساده تر است و از ۳ مرحله تشکیل شده است:

- ابتدا مراکز خوشه ها محاسبه می شود.

- به طور موقت گره i را، مرتبا از خوشه g، به خوشه $1, 2, \ldots, g-1, g+1, \ldots, p$ اختصاص داده می شود، که اگر تابع هدف را بهبود بخشید گره مجددا نشان گذاری می شود. که این مقدار تابع هدف بر اساس مراکز خوشه ها که قبلا بدست آمده است، محاسبه می شود.
- دور کامل الگوریتم تعیین می کند که آیا هر گونه تخصیص مجدد می تواند ساخته شده باشد.

یک عملکردی که در این زمینه می تواند مورد استفاده قرار گیرد استفاده از مراکز خوشه تقریبی و اجتناب از محاسبه دوباره است، که خود صرفه جویی خوبی است. در این عملکرد، مراکز خوشه ها از تخصیص به تخصیص مصون باقی می مانند و بنابراین بخش قابل توجهی از تابع هدف یکسان باقی می ماند، در صورتی که تخصیص مجدد در نظر گرفته شده است. در واقع تنها عناصر تابع هدف که باید تجدید نظر شوند، آنهایی هستند که شامل نوعی تعامل با مشاهدات مجدد تخصیص یافته هستند.

در مقاله آیکین و براون [1] [۱۶] از عملکردی مشابه استفاده کرده است، که به شرح زیر است:
مشاهده i را در نظر بگیرید که باید از خوشه g به خوشه h مجددا تخصیص داده شود. تنها محاسبه مورد نیاز مجموعه ای از تفاضلات (برای هزینه مسیر یابی i از طریق g) و مجموعه ای از جمع ها (برای هزینه مسیر یابی i از طریق h به جای g) است. سپس اگر $T(i,h)$ و $T(i.g)$ به ترتیب توابع هدف جدید و قدیمی باشند محاسبات به صورت زیر هستند:

$$T(i,h) = T(i,g) + D_1 + D_2 + D_3 \tag{۳-۹}$$

که

$$D_1 = \sum_{k \neq i} w_{ki} \Big\{ [d'_{p(k)h} + d_{hi}] - [d'_{p(k)g} + d_{gi}] \Big\} \tag{۳-۱۰}$$

$$D_2 = \sum_{k \neq i} w_{ik} \Big\{ [d_{ih} + d'_{hp(k)}] - [d_{ig} + d'_{gp(k)} +] \Big\} \tag{۳-۱۱}$$

$$D_3 = w_{ii} \Big\{ [d_{ih} + d_{hi}] - [d_{ig} + d_{gi}] \Big\} \tag{۳-۱۲}$$

که $p(k)$ نشان دهنده خوشه ای است که مشاهده k عضو آن است. می دانیم که اگر $w_{ii} = 0$ آنگاه $D_3 = 0$ است.

[1] Aykin and Brown

به طور خلاصه در روش ۲ مشاهدات مجددا به خوشه ای دیگر تخصیص داده می شوند و بدون محاسبه مجدد مراکز خوشه ها با هر تخصیص مجدد، و استفاده از معادله (۳-۹) که در پاراگراف قبلی نشان داده شده است، مقدار تابع هدف جدید را بدست می آوریم که اگر مقدار تابع هدف بهتر شده باشد در این صورت مشاهده را دوباره نشان گذاری می کنیم.
هدف روش ۲ این است که مقدار تابع هدف را از یک تخمین " ثابت " از مراکز خوشه ها محاسبه کند،

۳-۹ نتایج محاسبات

زمان اجرا برای مجموعه ای از ۵ مساله در جدول ۳-۲ گزارش داده شده است. سه پارامتر که در هر مسئله استفاده شده است عبارتند از:

n تعداد نقاط تصادفی است

P تعداد خوشه های مورد نیاز است

m تعداد تکرار مساله است

نقاط تعامل در یک مربع ۵۰ * ۵۰ توزیع می شوند. هنگامی که $P = ۴$ است تخصیصات اولیه در ۴ مربع ۲۵ * ۲۵ می باشند و در حالت $P = ۹$ در ۹ سلول $\frac{۵۰}{۳} * \frac{۵۰}{۳}$ می باشند. این تعدا خوشه ها بر اساس سهولت توسعه یک تفکیک یکنواخت اولیه انتخاب شده اند. مساله ۱ این است که ۲۵۰ نقطه را به ۴ خوشه تقسیم کنیم

Problem	n	p	m	CYCLES average	CPU secs per repetition of problem	Aggregate CPU sec
1	250	4	100	15.17	14.26	1428.64
2	375	4	96	19.05	39.66	3815.98
3	500	4	51	20.39	74.65	3818.19
4	250	9	39	26.87	97.32	3823.52
5	500	9	4	54.75	765.50	3806.09

شکل ۳-۲: نتایج CRAY Y-MP

فهرست منابع

[1] Alev SA, kara BY. Network hub location problems:the state of art. //www.ctan.org/pkg/xepersian, 2015.

[2] Me O. A quadratic integer program for the location of interacting hub facilities. Eur J Oper Res 1987;32:393–404. doi: http://dx.doi.org/10.1016/S0377-2217(87)80007-3.

[3] Campbell, J. F. Integer programming formulations of discrete hub location problems. *European Journal of Oper. Res.*, 72(2):387–405, 1994.

[4] Arnst AT, Krishnamoorthy M. Efficient algorithms for the uncapacitated single allocation p-hub median problem. LocatSci1996;4:139–54. http://dx.doi.org/10.1016/S0966-8349(96)00011-3.

[5] Ernst AT, Krishnamoorthy M. Exact and heuristic algorithms for the uncapacitated multiple allocation p-hub median problem. Eur J Oper Res 1998;104:100–12. http://dx.doi.org/10.1016/S0377-2217(96)00340-2.

[6] O'Kelly M.E. , Bryan D. , Skorin-Kapov D. , Skorin-Kapov J. Hub network design with single and multiple allocation: a computational study. Location Science, 4, 125–138.. https://doi.org/10.1016/S0966-8349(96)00015-0.

[7] Klincewisz JG. Heuristics for the p-hub location problem. Eur J Oper Res 1991;53:25–37 http://dx.doi.org/10.1016/0377-2217(91)90090-I.

[8] Klincewisz JG. A voiding local optima in the p-hub location problem using tabu search and grasp. Ann Oper Res1992;40:283–302 http://dx.doi.org/10.1007/BF02060483.

[9] Abdinnour-Helm S. Using simulated annealing to solve the p-hub median problem. Int J Phys Distrib Logist Manage 2001;31:203–20. http://dx.doi.org/10.1108/09600030110389532.

[10] Topcuoglu H, Corut F, Ermis M,Yilmaz G. Solving the uncapacitated hub location problem using genetic algorithms. ComputOperRes2005;32:967–84. http://dx.doi.org/10.1016/j.cor.2003.09.008.

[11] Kratica J,Stanimirovic Z,Tosic D,Filipovic V. Two genetic algorithms for solving the uncapacitated single allocation p-hub median problem. Eur J Oper Res 2007;182:15–28. http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2006.06.056.

[12] IIic A, Urosevic D, Brimberg J,Mladenovic N. A general variable neighborhood search for solving the uncapacitated single allocation p-hub median problem. Eur J Oper Res 2010; 36: 289–300. http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2010.02.022.

[13] O'Kelly ME. The location of interacting hub facilities. Transportation Science 1986; 20: 92–106. . http://dx.doi.org/10.1007/BF02060486.

[14] Aykin T. On the location of hub facilities. Transp. Sci. 22(1988)155-157. http://dx.doi.org/10.1287/trsc.26.3.212.

[15] Aykin T. The hub location and routing problem. European Journal of Operational Research 1995; 83; 200–219. .

[16] Aykin T, Brown GF. Interacting new facilities and location–allocation problems. Transp Sci 1992;26:212–22. http://dx.doi.org/10.1287/trsc.26.3.212.

[17] O'Kelly ME. clustering approach to the planar hub location problem. Ann Oper Res1992; 40: 339–53. .

[18] Campbell JF, O'Kelly ME. Twenty-five years of hub location research. Transp Sci 2012;46:153–69. http://dx.doi.org/10.1287/trsc.1120.0410.

[19] Eyster JW, White JA, Wierwille WW. On solving multifacility location problems using a hyperboloid approximation procedure. Am Inst Ind Eng Trans 1973;5:1–6 URL: http://www.jstor.org/stable/171609.

[20] Weiszfeld E. Sur le point par lequel la somme des distances de npoints donnés est minimum. Tohoku Math J 1937;43:355–86. http://dx.doi.org/10.1007/s10479-008-0352-z.

[21] Campbell JF. Hub location and the p-hub median problem. Oper Res 1996;44:923–35 URL: http://www.jstor.org/stable/171583.

[22] Campbell JF. Locating transportation terminals to serve an expanding demand. Transp Res Part B: Methodol 1990;24: 173–92. http://dx.doi.org/10.1016/0191-2615(90)90015-Q.

[23] Megiddo N, Supowit KJ. On the complexity of some common geometric location problems. SIAM J Comput 1984;13:182–96. http://dx.doi.org/10.1137/0213014.

[24] Falkenauer E. Genetic algorithms and grouping problems. NewYork: Wiley; 1998.

[25] Weiszfeld E. Sur le point par lequel la somme des distances de n points donnés est minimum. Tohoku Math J 1937;43:355–86. http://dx.doi.org/10.1007/s10479-008-0352-z.

پیوست آ

کد برنامه‌های روش خوشه بندی مسئله مکان یابی هاب مسطح

برنامه آ-۱: کد محاسبه مقادیر D_{ijgh}

```
function D = computeD(X,idx,hubs)
% M. Amintoosi
N = size(X,1);
NCluster = size(hubs,1);
D = zeros(N,N,NCluster,NCluster);
d = pdist2(X,hubs);
dp = pdist2(hubs,hubs);
for i=1:N
    for j=1:N
        g= idx(i);
        h=idx(j);
        D(i,j,g,h) = d(i,g) + dp(g,h) + d(j,h);
    end
end
```

برنامه آ-۲: کد محاسبه مقادیر K_{ijgh}

```
function K = computeK(X,idx,hubs)
% M. Amintoosi
N = size(X,1);
NCluster = size(hubs,1);
K = zeros(N,N,NCluster,NCluster);
for i=1:N
    for j=1:N
```

```
        k = idx(i);
        h = idx(j);
        K(i,j,k,h) = 1;
    end
end
```

برنامه آ-۳: کد تابع هدف

```
function  T = objfun(X,hubs,W,K,D)
% M.Amintoosi
N = size(X,1);
NCluster = size(hubs,1);
T = 0;
for i=1:N
    for j=1:N
        t = 0;
        for g=1:NCluster
            for h=1:NCluster
                t = t + K(i,j,g,h)*D(i,j,g,h);
            end
        end
        T = W(i,j)*t;
    end
end
```

برنامه آ-۴: کد خوشه بندی

```
% M.Amintoosi;


X = [1,1;...
    2,1;
    3, 1;
    4, 2 ;
    2,2 ;
    3,2 ;
    4,3 ;
    1,3 ;
    2,3 ;
    3,4 ];
NCluster = 3;
% [idx,C] = kmeans(X,kC);
% [X idx]

idx = [1 1 2 2 1 2 3 3 3 3]';

N = size(X,1);
W = zeros(N);
```

```
for i=1:N
    for j=1:N
        W(i,j) = i+j;
    end
end

for i=1:N
    for j=1:i
        x1 = X(i,1);
        y1 = X(i,2);
        x2 = X(j,1);
        y2 = X(j,2);
        d(i,j)=round(sqrt((x1-x2)^2+(y1-y2)^2));
        d(j,i)=d(i,j);
    end
end
hubs = zeros(NCluster,size(X,2));
for k=1:NCluster
    hub = mean(X(idx==k,:),1);
    hubs(k,:) = hub;
end

maxIter = 10;
figure(1); clf
markers = {'or','og','ob'};
cMarkers = {'<r','sg','pb'};
for r=1:maxIter

    K = computeK(X,idx,hubs);
    %%
    hold on;
    for k=1:NCluster
        plot(X(idx==k,1),X(idx==k,2),markers{k});
        plot(hubs(k,1),hubs(k,2),cMarkers{k},'MarkerSize',12+2*r);
    end
    hold off;
    drawnow
    pause(.5);
    D = computeD(X,idx,hubs);
    T = objfun(X,hubs,W,K,D);
    title(sprintf('T = %f',T));
    %%
    a = zeros(1,NCluster);
    for k=1:NCluster
        for h=1:NCluster
            for i=1:N
                for j=1:N
                    a(k) = a(k)+W(i,j)*(K(i,j,k,h)+K(i,j
```

```
                        ,h,k));
                end
            end
        end
    end

    b = zeros(NCluster,NCluster);
    for k=1:NCluster
        for h=1:NCluster
            for i=1:N
                for j=1:N
                    b(k,h) = b(k,h)+W(i,j)*(K(i,j,k,h)+K
                        (i,j,h,k));
                end
            end
        end
    end

    aa = diag(2*a);
    A = aa-b;

    SX = zeros(NCluster,1);
    for k=1:NCluster
        for i=1:N
            for j=1:N
                t1 = 0;
                for h=1:NCluster
                    t1 = t1+K(i,j,k,h)*X(i,1);
                end
                t2 = 0;
                for g=1:NCluster
                    t2 = t2+K(i,j,g,k)*X(j,1);
                end
                SX(k) = SX(k)+W(i,j)*(t1+t2);
            end
        end
    end

    SY = zeros(NCluster,1);
    for k=1:NCluster
        for i=1:N
            for j=1:N
                t1 = 0;
                for h=1:NCluster
                    t1 = t1+K(i,j,k,h)*X(i,2);
                end
                t2 = 0;
                for g=1:NCluster
                    t2 = t2+K(i,j,g,k)*X(j,2);
```

```
                end
                SY(k) = SY(k)+W(i,j)*(t1+t2);
            end
        end
    end

    x = pinv(A)*SX;
    y = pinv(A)*SY;
    hubs = [x,y];
    idx  = reallocation(X,hubs,W,idx);
end
```

برنامه آ-۵: کد تخصیص مجدد

```
function bestIdx = reallocation(X,hubs,W,idx)
% M.Amintoosi
N = size(X,1);
NCluster = size(hubs,1);
idxOld = idx;
minT = inf;
bestIdx = idx;
for i=1:N
    listNewCIndices = setdiff(1:NCluster,idx(i));
    for ind = listNewCIndices
        idx = idxOld;
        idx(i) = ind;
        K = computeK(X,idx,hubs);
        D = computeD(X,idx,hubs);
        T = objfun(W,K,D);
        if T<minT
            minT = T;
            bestIdx = idx;
        end
    end
end
```

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

برازندگی	Fitness
بهینه‌ی محلی	Local Optimum
پارامتر	Parameter
پیچیدگی محاسباتی	Camputational Complexity
تقاطع	Crossover
جابه‌جایی	Swap
جایگزینی	Replacement
جمعیت	Population
جواب	Solution
جهش	Mutation
چرخ رولت	Roulette Wheel
حرکت	Move
ژن	Gene
عملگر تغییر	Variation Operator
غیرهاب	Spoke
فرزند	Offspring
کروموزوم	Chromosome
لیست کاندید	Candidate List
لیست ممنوعه	Tabu List
مدت ممنوعه	Tabu Tenure
مسئله تصمیم	Decision Problem
معیار تنفس	Aspiration Criteria
هاب	Hub

هاب . . . . Hub

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

برازندگی	Fitness
بهینه‌ی محلی	Local Optimum
پارامتر	Parameter
پیچیدگی محاسباتی	Camputational Complexity
تقاطع	Crossover
جابه‌جایی	Swap
جایگزینی	Replacement
جمعیت	Population
جواب	Solution
جهش	Mutation
چرخ رولت	Roulette Wheel
حرکت	Move
ژن	Gene
عملگر تغییر	Variation Operator
غیرهاب	Spoke
فرزند	Offspring
کروموزوم	Chromosome
لیست کاندید	Candidate List
لیست ممنوعه	Tabu List
مدت ممنوعه	Tabu Tenure
مسئله تصمیم	Decision Problem
معیار تنفس	Aspiration Criteria
هاب	Hub

هاب . . . . Hub

Hakim Sabzevari University

An Outline of MSc. Thesis

دانشگاه حکیم سبزواری

Surname:Hasanzadeh	Name:Zahra	Student No.:9313133039
Supervisor: Dr. Mahmood Amintoosi		
Advisor: Dr. Mehdi Zaferanieh		
Faculty of Mathematics and Computer Science		
Program: Applied Mathematics Field:Operational Research		
Title of thesis: A genetic algorithm for the uncapacitated single allocation planar hub location problem		
Keywords:Genetic algorithms, Hub location problems, Planar hub location problems		
Abstract:		

Hakim Sabzevari University
Faculty of Mathematics and Computer Science

A Thesis Submitted in Partial Fulfilment of the Requirement for the Degree of Master of Science in Applied Mathematics

A genetic algorithm for the uncapacitated single allocation planar hub location problem

Supervisor:
Dr. Mahmood Amintoosi

Advisor:
Dr. Mehdi Zaferanieh

By:
Zahra Hasanzadeh