بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه حکیم سبزواری

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی کاربردی
گرایش تحقیق در عملیات

مدل سازی مسائل برش چندمرحله ای مواد اولیه

استاد راهنما

دکتر مهدی زعفرانیه

استاد مشاور

دکتر محمود امین‌طوسی

پژوهشگر:

گلنسا ثوابی

شهریور ۱۳۹۷

باسمه تعالی

شماره:

صورتجلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد

تاریخ:

با تلاوت آیاتی چند ازکلام الله مجید جلسه دفاع از پایان‌نامه آقای /خانم **گلنسا ثوابی** دانشجوی رشته ریاضی کاربردی به شماره دانشجویی ۹۲۱۳۱۳۳۱۱۱ با عنوان:

مدل سازی مسائل برش چندمرحله ای مواد اولیه

در ساعت   مورخه   در محل دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر تشکیل گردید . پس از استماع گزارش ارائه شده توسط دانشجو و استاد راهنما، هیات داوران و حاضران سئوالاتی را مطرح و آقای / خانم گلنسا ثوابی به دفاع از موضوع پرداخت و به سئوالات آنها پاسخ گفت. سپس پایان‌نامه توسط هیات داوران مورد ارزشیابی قرار گرفت و نمره   برابر درجه   برای آن تعیین گردید .

به‌این ترتیب ضمن تصویب پایان‌نامه مزبور از این تاریخ آقای/ خانم گلنسا ثوابی به عنوان کارشناس ارشد در رشته ریاضی کاربردی شناخته می‌شود .

ردیف	نام و نام خانوادگی	سمت	امضـــــــــــــا
۱	دکتر مهدی زعفرانیه	استاد راهنما	
۲	دکتر محمود امین‌طوسی	استاد مشاور	
۳	دکتر	استاد داور	
۴	دکتر	نماینده تحصیلات تکمیلی	

مدیر گروه: دکتر محمدعلی پرتانیان

رونوشت:

۱. معاون محترم آموزشی و تحصیلات تکمیلی دانشگاه جهت اطلاع

۲. معاون محترم پژوهشی دانشگاه جهت اطلاع

۳. آموزش دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر جهت درج در پرونده دانشجو

سوگند نامه دانش آموختگان دانشگاه حکیم سبزواری

به نام خداوند جان و خرد　　کزین برتر اندیشه بر نگذرد

اینک که به خواست آفریدگار پاک، کوشش خویش و بهره گیری از دانش استادان و سرمایه‌های مادی و معنوی این مرز و بوم، توشه‌ای از دانش و خرد گردآورده‌ام، در پیشگاه خداوند بزرگ سوگند یاد می‌کنم که در به کارگیری دانش خویش، همواره بر راه راست ودرست گام بردارم. خداوند بزرگ، شما شاهدان، دانشجویان و دیگر حاضران را به عنوان داورانی امین گواه می گیرم که ازهمه دانش و توان خود برای گسترش مرزهای دانش بهره گیرم و از هیچ کوششی برای تبدیل جهان به جایی بهتر برای زیستن، دریغ نورزم. پیمان می‌بندم که همواره کرامت انسانی را در نظر داشته باشم و همنوعان خود را در هر زمان و مکان تا سر حد امکان یاری دهم. سوگند می خورم که در به کارگیری دانش خویش به کاری که با راه و رسم انسانی، آیین پرهیزگاری، شرافت و اصول اخلاقی برخاسته از ادیان بزرگ الهی، به ویژه دین مبین اسلام، مباینت دارد دست نیازم. همچنین در سایه اصول جهان شمول انسانی و اسلامی، پیمان می‌بندم از هیچ کوششی برای آبادانی و سرافرازی میهن و هم میهنانم فروگذاری نکنم و خداوند بزرگ را به یاری طلبم تا همواره در پیشگاه او و در برابر وجدان بیدار خویش و ملت سرافراز، بر این پیمان تا ابد استوار بمانم.

نام و نام خانوادگی:　گلنسا ثوابی

تاریخ و امضا:

تأییدیه‌ی صحت و اصالت نتایج

باسمه تعالی

اینجانب گلنسا ثوابی به شماره دانشجویی ۹۲۱۳۱۳۳۱۱۱ دانشجوی رشته ریاضی کاربردی مقطع تحصیلی کارشناسی ارشد تأیید می‌نمایم که کلیه‌ی نتایج این پایان‌نامه حاصل کار اینجانب و بدون هرگونه دخل و تصرف است و موارد نسخه برداری شده از آثار دیگران را با ذکر کامل مشخصات منبع ذکر کرده‌ام. درصورت اثبات خلاف مندرجات فوق، به تشخیص دانشگاه مطابق با ضوابط و مقررات حاکم (قانون حمایت از حقوق مؤلفان و مصنفان و قانون ترجمه و تکثیر کتب و نشریات و آثار صوتی، ضوابط و مقررات آموزشی، پژوهشی و انضباطی ...) با اینجانب رفتار خواهد شد و حق هرگونه اعتراض درخصوص احقاق حقوق مکتسب و تشخیص و تعیین تخلف و مجازات را از خویش سلب می‌نمایم. در ضمن، مسؤولیت هرگونه پاسخگویی به اشخاص اعم از حقیقی و حقوقی و مراجع ذی صلاح (اعم از اداری و قضایی) به عهده ی اینجانب خواهد بود و دانشگاه هیچ گونه مسؤولیتی در این خصوص نخواهد داشت.

نام و نام خانوادگی: گلنسا ثوابی

تاریخ و امضا:

مجوز بهره برداری از پایان‌نامه

بهره برداری از این پایان‌نامه در چهارچوب مقررات کتابخانه و با توجه به محدودیتی که توسط استاد راهنما به شرح زیر تعیین می‌شود، بلامانع است:

☐ بهره برداری از این پایان‌نامه برای همگان بلامانع است.

☐ بهره برداری از این پایان‌نامه با اخذ مجوز از استاد راهنما، بلامانع است.

☐ بهره برداری از این پایان‌نامه تا تاریخ .... ممنوع است.

استاد راهنما: دکتر مهدی زعفرانیه

تاریخ و امضا:

تقدیم به:

پدر و مادرم

و

همسر عزیزم

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر مهدی زعفرانیه، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی رسید.

از جناب آقای دکتر محمود امین‌طوسی که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

در پایان، بوسه می زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس شان را و تشکر می‌کنم از همسر عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودش، که بهترین پشتیبان من است.

گلنسا ثوابی

شهریور ۱۳۹۷

فهرست مطالب

فهرست تصاویر د

فهرست جداول ه

چکیده ۱

پیش‌گفتار ۲

فصل ۱: تعاریف و پیشینه تحقیق ۳

۱-۱ مقدمه ۳

۱-۲ مروری بر برنامه‌ریزی خطی ۳

۱-۲-۱ دوگان مسأله برنامه‌ریزی خطی ۴

۱-۲-۲ تاریخچه برنامه ریزی خطی ۵

۱-۲-۳ سیمپلکس اصلاح شده ۶

۱-۲-۴ شکل ضربی وارون ماتریس پایه ۶

۱-۳ مروری برمسائل برش ماده اولیه و کارهای انجام شده ۸

۱-۳-۱ طبقه بندی مسائل برش موجودی ۱۰

۱-۳-۲ مسائل برش موجودی یک بعدی ۱۱

۱-۳-۳ مسائل برش موجودی دو بعدی مستطیل شکل ۱۲

۱-۳-۴ مسائل برش دو بعدی نامنظم ۱۴

۱-۳-۵ فرمول بندی مسائل برش موجودی ۱۵

۱-۴ فرمول بندی استاندارد مسئله برش موجودی ۱۵

۱-۵ مسأله کوله‌پشتی ۱۶

فصل ۲: الگوریتم ژنتیک و تکنیک تولید ستون ۲۰
۲-۱ مقدمه ۲۰
۲-۲ ساختار الگوریتم ژنتیک ۲۰
۲-۲-۱ تابع برازندگی ۲۲
۲-۲-۲ عملگرهای ژنتیکی ۲۳
۲-۳ تکنیک تولید ستون ۳۱
۲-۳-۱ گام‌های روش تولید ستون ۳۱
۲-۳-۲ روش تولید ستون در حل مسئله صفحات برش ۳۲

فصل ۳: روش های حل مساله برش دو مرحله‌ای ۴۰
۳-۱ مقدمه ۴۰
۳-۲ مدل با لیست رول های میانی اجباری (داده شده) ۴۱
۳-۲-۱ مساله دوگان ۴۶
۳-۲-۲ تولید ستون ۴۸
۳-۳ مدل با رول‌های میانی اختیاری (مجهول) ۵۳
۳-۳-۱ تولید سطر و ستون ۵۳
۳-۴ انتخاب ستون اصلاح شده در الگوریتم سیمپلکس ۵۷

فصل ۴: روش‌هایی برای حل مسئله کمکی متناظر با مسئله برش دو مرحله‌ای ۶۲
۴-۱ مقدمه ۶۲
۴-۲ روش ساده ۶۳
۴-۳ روش ابتکاری ۶۳
۴-۴ الگوریتم ژنتیک ۶۴
۴-۵ روش شاخه و کران ۶۷
۴-۶ مسئله نمونه ۶۸
۴-۷ پیشنهاد و نتیجه گیری ۷۱

فهرست منابع ۷۲

پیوست آ: برنامه $MATLAB$ ۷۴

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۷۶
واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۷۷

فهرست تصاویر

۱-۱ مراحل سیمپلکس ۴
۱-۲ نمایش الگوهای T شکل ۹
۱-۳ نمایش موجودی، سفارشات، برش لوله‌ها و ضایعات ۱۲
۱-۴ الگوی برش دو مرحله‌ای، X نواحی ضایعات ۱۳
۱-۵ برش گیوتینی(چپ) و غیرگیوتینی(راست) ۱۳
۱-۶ برش نامتعامد ۱۴

۲-۱ شکل یک کروموزم ۲۱
۲-۲ نحوه انتخاب کروموزوم برتر توسط چرخ رولت ۲۵
۲-۳ برش تک نقطه‌ای ۲۶
۲-۴ برش دو نقطه‌ای ۲۶
۲-۵ شکل یک کروموزوم قبل و بعد از عملگر جهش ۲۷
۲-۶ مثالی از اکسترمم‌های محلی و سراسری ۲۸

۳-۱ نمونه‌ای از مساله برش سه مرحله‌ای ۴۱
۳-۲ ارتباط بین رول‌های اولیه، میانی و پایانی ۴۲
۳-۳ نحوه ارتباط بین رول ها در مساله مورد بررسی ۴۳

فهرست جداول

۱-۱ روابط بین مسائل اولیه و دوگان ۵
۱-۲ چهار مشخصه طبقه‌بندی مسائل برش موجودی توسط دایکوف ۱۱

۲-۱ الگوهای مختلف برش قطعه‌ها ۳۳

۴-۱ سایز رول‌های اولیه و پایانی ۶۸
۴-۲ ماشین‌ها ۶۸
۴-۳ ماتریس پایه اولیه ۶۹
۴-۴ دینامیک حل مسئله ۷۰

فرم چکیده ی پایان‌نامه ی دوره ی تحصیلات تکمیلی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

نام خانوادگی دانشجو:ثوابی	نام:گلنسا	ش. دانشجویی:۹۲۱۳۱۳۳۱۱۱
استاد راهنما: دکتر مهدی زعفرانیه		
استاد مشاور: دکتر محمود امین‌طوسی		
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر	رشته: ریاضی کاربردی	گرایش:تحقیق در عملیات
مقطع: کارشناسی ارشد	تاریخ دفاع:شهریور ۱۳۹۷	تعداد صفحات: ۷۹
عنوان پایان‌نامه: مدل سازی مسائل برش چندمرحله ای مواد اولیه		
کلید واژه‌ها: مسأله برش ماده اولیه، روش تولید سطر وستون، مساله کوله پشتی غیرخطی، الگوریتم ژنتیک		

چکیده: در مساله برش ماده اولیه (CSP) ممکن است فرآیند برش در چندین مرحله پی درپی توزیع شود. هرمرحله به جز آخرین مرحله، محصولات میانی را ایجاد می‌کند. لیست محصولات میانی ممکن است داده شود یا اختیاری باشد. هدف این است که برای پاسخگویی به تقاضای مشتری، مقدار کل مواد خارج شده از انبار را به حداقل برسانیم. اگر سایزهای میانی داده شود، تکنیک تولید ستون می‌تواند برای مساله برش دو مرحله‌ای اعمال شود. اگر سایزهای میانی داده نشده باشد، به پیچیدگی مساله افزوده می‌شود.

ما یک روش خاص برای این مورد پیشنهاد می کنیم. تکنیک تولید سطر وستون، که به صورت پویا هم سطرها(سایزهای میانی) و هم ستون(الگوهای برش) را تولید می کند. این روش از یک مساله کوله پشتی غیرخطی که در چارچوب الگوریتم سیمپلکس اصلاح شده تعبیه شده، استفاده می‌کند. در مقایسه با روش تولید ستون، تکنیک توسعه یافته نمی تواند جواب بهینه را تضمین کند. با این حال، نتایج آزمایش های محاسباتی بسیار امیدوار کننده است و ثابت می کند که این روش می تواند به مجموعه ابزارها برای مدل سازی و حل CSPهای چند مرحله ای اضافه شود. به عنوان راه حلی دیگربرای حل این مساله می‌توانیم از الگوریتم ژنتیک بهره ببریم.

پیش‌گفتار

به طور خلاصه مسئله برش ماده اولیه[1] (CSP) ، موضوع عملی چگونگی برش قطعات مورد نیاز از مواد اولیه را بیان می‌کند. زمینه‌های کاربردی زیادی از CSP در صنایع مختلف مانند برش میله و لوله، شیشه، چوب، فلز، پلاستیک، چرم، کاغذ، سنگ و ... وجود دارد. همچنین CSP دوبعدی و سه بعدی می توانند از دیدگاه بارگذاری و حمل ونقل مورد استفاده قرار بگیرند.

محدود بودن منابع یکی از مهم‌ترین عواملی است که بهینه سازی فرآیندهای تولید را توجیه می‌کند. در واقع، استفاده مقرون به صرفه از منابع نه تنها به نفع صنعتگر است، بلکه نگرانی جهانیان را در برمی‌گیرد. دفع زباله‌های ناشی از عملیات برداشت برش مواد اولیه می‌تواند باعث مشکل آلودگی و تخریب بیش از حد ذخایر نادر زمین باشد.

ایده اصلی این پایان نامه از مقالات زیر گرفته شده است.

- Zak، Eugene J. Modeling multistage cutting stock problems. European journal of operational research، ۳۲۷-۳۱۳:(۲)۱۴۱ .۲۰۰۲،

- Cheng، C.H. Feiring، B.R. Chengb T.C.E. Chengb. The cutting stock problem – a survey. international journal of production economics، ۳۰۵-۲۹۱:(۹)۳۶ .۱۹۹۴،

این پایان نامه مشتمل بر ۴ فصل است. فصل اول شامل تعاریف و مفاهیم مورد نیاز برنامه ریزی خطی، مروری برمسائل برش و تاریخچه مختصری از آن‌ها است. فصل دوم به معرفی الگوریتم ژنتیک به عنوان یک روش فرا ابتکاری برای حل مسائل بهینه سازی می‌پردازد و همچنین مروری بر تکنیک تولید ستون خواهد داشت. در فصل سوم، تکنیک تولید سطر و ستون برای حل مسئله CSP دو مرحله‌ای با رول‌های میانی مجهول تشریح می‌گردد و فصل چهارم به ارائه راهکارهایی برای حل مسئله کوله پشتی غیرخطی وابسته به تکنیک تولید سطر و ستون خواهد پرداخت.

[1] Cutting Stock Problem

فصل ۱

تعاریف و پیشینه تحقیق

۱-۱ مقدمه

در این بخش همه تعاریف و مفاهیم مورد نیاز در فصول آتی ارائه شده است. مفاهیمی از قبیل مسأله برنامه‌ریزی خطی و دوگان برنامه‌ریزی خطی، مسأله کوله‌پشتی، مسأله برش و... . همچنین مروری اجمالی خواهیم داشت بر انواع مسائل برش و کارهایی که پیش از این برای حل این مسائل به کار گرفته شده است. مطالب از مراجع [۱، ۲، ۳] انتخاب شده‌اند.

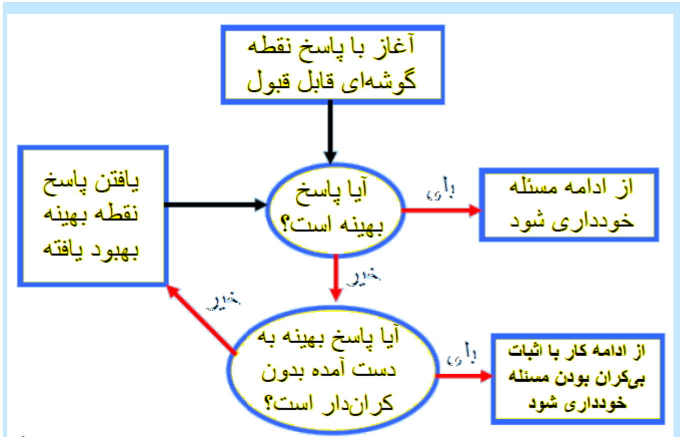
۱-۲ مروری بر برنامه‌ریزی خطی

برنامه‌ریزی خطی (LP)[۱] ، یا همان بهینه‌سازی خطی، روشی در ریاضیات است که به پیدا کردن مقدار کمینه یا بیشینه از یک تابع خطی روی یک چندضلعی محدب می‌پردازد [۱]. بدون شک برنامه‌ریزی خطی، طبیعی‌ترین مکانیزم برای فرمول‌بندی بسیاری از مسأله‌ها محسوب می‌شود. این چندضلعی محدب در حقیقت نمایش نموداری تعدادی محدودیت از نوع نامعادله روی متغیرهای تابع است. به بیان ساده‌تر به وسیله برنامه‌سازی خطی می‌توان بهترین نتیجه (مثلاً بیشترین سود یا کمترین هزینه) را در شرایط خاص و با محدودیت‌های خاص به دست آورد. محل اصلی استفاده برنامه‌ریزی خطی در مدیریت و اقتصاد است، اما در مهندسی نیز کاربردهای فراوانی دارد.

الگوریتم سیمپلکس که توسط جورج دانتزینگ شکل گرفت، مسائل برنامه‌ریزی خطی را به این ترتیب حل

[1] Linear Programming

می‌کند که یک جواب قابل قبول در یکی از رئوس چندضلعی فراهم می‌کند و سپس در راستای اضلاع چندضلعی به طرف رئوسی با مقدار بالاتری از تابع هدف حرکت می‌کند تا این که به نقطه بهینه برسد.



شکل ۱-۱: مراحل سیمپلکس

یک مسأله برنامه‌ریزی خطی (مسأله‌ای از نوع مینیمم‌سازی یا ماکزیمم‌سازی یک تابع خطی، به‌طوری که محدود به تعداد متناهی از محدودیت‌های خطی باشد) می‌تواند به صورت‌های مختلفی بیان شود. شکل استاندارد یک مسأله برنامه‌ریزی خطی را به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ s.t. \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

که در آن $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ماتریس ضرایب یا محدودیت‌ها، $x \in \mathbb{R}^n$ و $b \in \mathbb{R}^m$ است. تابع خطی $c^T x$ را تابع هدف و $c_1, \cdots, c_n$ را ضرایب هزینه می‌نامیم. مؤلفه‌های ماتریس A را با a_{ij} نمایش می‌دهیم و به آنها ضرایب تکنولوژیکی و $Ax = b$ را محدودیت یا قید گوییم. همچنین $x_1, \cdots, x_n$ را متغیرهای تصمیم گوییم.

۱-۲-۱ دوگان مسأله برنامه‌ریزی خطی

هر مسأله برنامه‌ریزی خطی با یک مسأله دیگر متناظر است، مسأله اصلی را مسأله اولیه و مسأله متناظر با آن را مسأله دوگان [1] می‌نامیم. روابط بسیار مهمی بین مسائل اولیه و دوگان برقرار است. همچنین در برخی موارد حل

[1] Dual

جدول ۱-۱: روابط بین مسائل اولیه و دوگان

	مسئله ماکسیمم سازی	مساله می‌نیمم سازی	
محدودیت‌ها	$\leqslant$ $\geqslant$ $=$	$\geqslant 0$ $\leqslant 0$ $free$	متغیرها
متغیرها	$\geqslant 0$ $\leqslant 0$ $free$	$\geqslant$ $\leqslant$ $=$	محدودیت‌ها

کردن مسأله دوگان ساده‌تر از حل مسأله اولیه است. روابط بین مسائل اولیه و دوگان در جدول زیر نشان داده شده است.

همان‌طور که مشخص است به ازای هر قید در مسأله اولیه، یک متغیر در دوگان وجود دارد. بسته به این‌که قیدهای اولیه از نوع معادله یا نامعادله باشند، متغیر دوگان متناظر، به ترتیب، آزاد یا مقید در علامت است. به‌علاوه بسته به این‌که یک متغیر در مسأله اولیه آزاد یا مقید در علامت باشد، قید دوگان متناظر، به ترتیب، معادله یا نامعادله است.

۱-۲-۲ تاریخچه برنامه ریزی خطی

در واقع برنامه‌ریزی خطی بخشی از تحقیق در عملیات و موسوم به علم مدیریت است که اول بار توسط نیروی هوایی ارتش آمریکا بکار گرفته شد. می‌توان گفت حدود یک‌چهارم کل محاسبات علمی که بر روی رایانه انجام گرفته‌است، به برنامه‌ریزی خطی و مشتقات آن مربوط می‌شود.

مسئلهٔ حل مجموعه‌ای از نامعادلات خطی از زمان فوریه مطرح بوده‌است. برنامه‌ریزی خطی به عنوان یک مدل ریاضی در زمان جنگ جهانی دوم شکل گرفت تا خرج‌ها و بازگشت‌های مالی را طوری سامان بخشد که به کاهش هزینه‌های ارتش و افزایش خسارات دشمن بینجامد. این طرح تا سال ۱۹۴۷ سری باقی ماند. پس از جنگ، بسیاری از صنایع به استفاده از آن پرداختند. پایه‌گذاران این حوزه جورج دانتزیگ منتشرکنندهٔ روش سیمپلکس در سال ۱۹۴۷، جان فون نویمان مطرح‌کننده نظریه دوگانگی در همان سال، و لئونید کانتروویچ ریاضیدان روس که از تکنیک‌های مشابهی پیش از دانتزینگ استفاده کرد و نوبل سال ۱۹۵۷ را برد هستند. نخستین بار در سال ۱۹۷۹ لئونید خاچیان نشان داد که مسئله برنامه‌ریزی خطی در مرتبه زمانی چندجمله‌ای قابل حل است. اما

پیشرفت اساسی‌تر زمانی حاصل شد که نراندرا کارمارکار یک روش نقطه داخلی جدید برای حل این مسائل معرفی کرد. مثال دانتزینگ برای منتصب کردن هفتاد نفر به هفتاد شغل متمایز کارآمدی برنامه‌ریزی خطی را به نمایش می‌گذارد. توان محاسباتی لازم برای آزمودن همهٔ جایگشتهای ممکن این مسئله بسیار بالاست. این تعداد از تعداد ذرات موجود در عالم بیشتر است. با این حال، پیدا کردن پاسخ بهینه با تبدیل مسئله به یک مسئله برنامه‌ریزی خطی و حل آن با روش سیمپلکس تنها لحظه‌ای طول می‌کشد.

۱-۲-۳ سیمپلکس اصلاح شده

سیمپلکس اصلاح شده رهیافت قاعده داری است برای اجرای مراحل سیمپلکس در درایه‌های کوچکتر و محاسبات کمتر، بنابراین صرفه جویی در جا و زمان است. مراحل روش سیمپلکس اصلاح شده (برای مساله مینیمم سازی) را به طور خلاصه بیان می‌کنیم.

فرض کنید یک جواب شدنی پایه با پایه مفروض B (با معکوس $B^{-۱}$) در اختیار داریم.

برای شروع $B^{-۱} = I$. پس:

۱. جواب شدنی پایه عبارتست از $x_B = B^{-۱}b = \bar{b}$ و $x_N = ۰$. تابع هدف $z = c_B B^{-۱}b$.

۲. مضارب سیمپلکس $w = c_B B^{-۱}$ را محاسبه کنید. به ازای هر متغیر غیر پایه $z_j - c_j = c_B B^{-۱}a_j - c_j$ را به دست آورید. فرض کنید $z_k - c_k = \max(z_j - c_j)$ اگر $z_k - c_k \leq ۰$ پس توقف کنید؛ جواب جاری بهینه است. در غیر این صورت به مرحله ۳ بروید.

۳. $y_k = B^{-۱}a_k$ را محاسبه کنید. اگر $y_k \leq ۰$ توقف کنید؛ جواب بهینه نامتناهی است. در غیر این صورت اندیس متغر خروجی z_{B_r} را با آزمون نسبت به صورت زیر تعیین کنید:

$$\frac{\overline{b_r}}{y_{rk}} = \min\{\frac{\overline{b_i}}{y_{ik}} \ : \ y_{ik} > ۰\},$$

با جایگزینی a_k به جای a_r ماتریس B را بهنگام کنید و به مرحله ۱ بروید.

۱-۲-۴ شکل ضربی وارون ماتریس پایه

قسمت عمده ای از محاسبات روش سیمپلکس اصلاح شده در ارتباط با تغییرات $B^{-۱}$ از یک جدول به جدول بعدی است. در این بخش، روشی موثر برای محاسبه $B^{-۱}$ ارائه می دهیم. فرض کنید یک مسئله LP با m قید را حل می کنیم. می دانیم که x_k ، باید متغیر پایه ای سطر r ام شود (x_k باید وارد پایه شود). اگر ستون نظیر x_k

الگوریتم ۱-۱ خلاصه روش سیمپلکس اصلاح شده (مساله می‌نیمم سازی)

۱: فرض کنید یک جواب شدنی پایه با پایه مفروض B (با معکوس B^{-1}) در اختیار داریم. برای شروع $B^{-1} = I$

۲: برای جدول فعلی $c_B B^{-1}$ را محاسبه کنیم .

۳: کلیه متغیر های غیر پایه ای جدول فعلی را قیمت گذاری کنیم. اگر قیمت کلیه متغیر های غیر پایه ای نامنفی است، پایه فعلی بهینه است. اگر پایه فعلی بهینه نیست، یک متغیر غیر پایه ای را که دارای منفی ترین ضریب در سطر صفر است را وارد پایه می کنیم و آن را x_k می نامیم .

۴: برای تعیین اینکه x_k متغیر پایه ای چه سطری خواهد بود، ستون نظیر x_k را در جدول فعلی محاسبه می کنیم $(B^{-1}a_k)$ و همین طور سمت راست جدول فعلی را محاسبه می کنیم $(B^{-1}b)$ اکنون می توانیم با استفاده از آزمون نسبت مشخص کنیم که x_k متغیر پایه ای کدام سطر خواهد بود. بنابراین در این مرحله مجموعه متغیر های پایه ای جدول جدید را می شناسیم .

۵: با استفاده از ستون x_k و اعمال سطری مقدماتی B^{-1} جدید را به دست می آوریم و سپس به مرحله ۱ بر می گردیم.

در جدول جدید به صورت زیر باشد :

$$\begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix}$$

ماتریس $E_{m,m}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$E = \begin{bmatrix}
1 & 0 & \cdots & -\frac{\bar{a}_{1k}}{\bar{a}_{rk}} & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \cdots & -\frac{\bar{a}_{2k}}{\bar{a}_{rk}} & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\bar{a}_{rk}} & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & -\frac{\bar{a}_{m-1,k}}{\bar{a}_{rk}} & \cdots & 1 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & -\frac{\bar{a}_{m,k}}{\bar{a}_{rk}} & \cdots & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

.

به طور خلاصه ماتریس E همان ماتریس I_m است که ستون r آن با بردار ستونی زیر تعویض شده است :

$$\begin{bmatrix} -\frac{\bar{a}_{1k}}{\bar{a}_{rk}} \\ -\frac{\bar{a}_{2k}}{\bar{a}_{rk}} \\ \vdots \\ \frac{1}{\bar{a}_{rk}} \\ \vdots \\ -\frac{\bar{a}_{m-1,k}}{\bar{a}_{rk}} \\ -\frac{\bar{a}_{mk}}{\bar{a}_{rk}} \end{bmatrix}$$

.

تعریف : یک ماتریس (مانند E) را که فقط در یک ستون با ماتریس همانی تفاوت دارد، ماتریس مقدماتی نامند . و برای تعیین B^{-1} در هر گام از الگوریتم سیمپلکس اصلاح شده به شکل زیر مورد استفاده قرار می‌گیرد:

$$B^{-1}\ \text{جدول جدید} = E(B^{-1}\ \text{جدول فعلی}) \qquad (1-1)$$

اگر جدول اولیه را جدول صفر و E_i را ماتریس مقدماتی نظیر i امین جدول سیمپلکس بنامیم، داریم :

$$B_1^{-1} = E_0 B_0^{-1} = E_0 \qquad (B_0^{-1} = I_m)$$

به طور کلی

$$B_k^{-1} = E_{k-1}E_{k-2}\cdots E_1 E_0$$

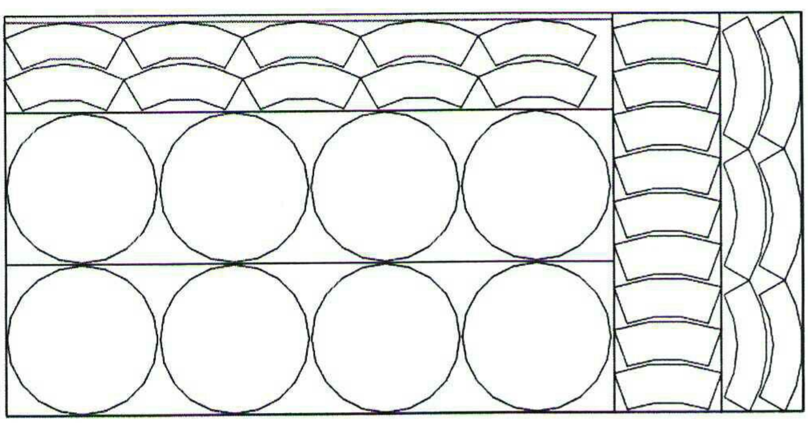
را شکل ضربی وارون نامند. اغلب نرم افزارهای حل مسئله برنامه ریزی خطی از روش سیمپلکس اصلاح شده همراه با محاسبه متوالی B^{-1} از طریق شکل ضربی وارون استفاده می کنند.

۱-۳ مروری برمسائل برش ماده اولیه و کارهای انجام شده

مدیریت اقتصاد و تولید صحیح، از ارکان مهم در اداره و راهبری موثر یک سازمان است. در فرآیند تولید بسیاری از صنایع نیاز است تا قطعات کوچکتری با برش اجسام بزرگ‌تر حاصل شوند و یا به طور معادل قطعات کوچکتری

در یک جسم بزرگتر جای داده شوند. در این عمل معمولا بخش‌هایی از جسم بزرگتر به قطعاتی تبدیل می شوند که قابل استفاده در هیچ یک از محصولات تولیدی نبوده و به عنوان ضایعات و دورریز محسوب می شوند کاهش چنین ضایعاتی نقش مهمی در کاهش هزینه‌ها داشته و به عنوان یکی از موضوعات علم تحقیق در عملیات تحت عنوان مسئله برش موجودی (CSP)[1] توجه بسیاری از محققان را در نیم قرن گذشته به خود جلب کرده است [۲]. در عمل قطعات کوچکتر به عنوان لیست سفارشات و قطعات بزرگتر به عنوان موجودی شناخته می‌شوند. هدف اصلی، کمینه کردن ضایعات حاصل از برش به منظور تامین سفارشات از موجودی است. به همین دلیل این مسئله را مسئله کاهش ضایعات برش نیز می‌نامند. غالباً هدف مدیریت در برنامه ریزی برش خام به نحوی است که ضمن کمینه کردن ضایعات برش، کمترین رول های مصرفی را نیز داشته باشیم تا علاوه بر کاهش هزینه مواد اولیه و نیز ضایعات تولید مناسب‌تر، کاهش هزینه ها و روش های کمک به اقتصاد سازمان دست یافت. در کاربردهای واقعی ملاحظه یکسری اهداف فرعی دیگر از جمله کاهش تعداد الگوهای برش های مختلف (کاهش هزینه راه اندازی تنظیم)، هزینه استفاده از یک مدل برش خاص و...نیز لازم است.

این مسئله تقریباً در تمامی صنایع دارای کاربرد فراوانی است و در صورت بهبود نحوه استفاده از مواد اولیه، می‌توان صرفه جویی قابل ملاحظه ای در قیمت تمام شده محصولات به دست آورد کاربرد این مدل در حالت یک بعدی، مانند برش میله و الوار، دو بعدی مانند برش شیشه، چوب، فلز، پلاستیک، پارچه، چرم، و... سه بعدی مانند سنگ، امکان پذیر است. حالت دو بعدی و سه بعدی می تواند از دیدگاه بارگذاری و حمل و نقل نیز مورد استفاده قرار گیرد. به دلیل اهمیت و کاربرد زیاد این مدل در صنایع مختلف، تلاش زیادی برای حل آن انجام شده است. برای مثال آقای کوی[2] [۳] الگوریتمی ارائه می‌دهد که در آن تعدادی از سفارشات در یک نوار کنار هم قرار داده شده اند، سپس با قرار دادن تعدادی از این نوارها در محور X یا Y الگوهای T شکل را به وجود می آورد.



شکل ۱-۲: نمایش الگوهای T شکل

[1]Cuting Stock Problem [2]Cui

در این الگوریتم، ممکن است بیش از یک ردیف از قطاع های مشابه در یک نوار قرار گیرد. هر نوار نیز در یکی از دو جهت افقی x یا عمودی y می‌تواند قرار گیرد. این روش از الگوریتم کوله پشتی و یک روش شمارش ضمنی برای تعیین ترکیب بهینه سطرهای شیار در یک نوار، تعداد نوار و جهت آنها در یک الگو استفاده می کند. این الگوریتم در یک مسئله واقعی برش کارخانه که ژنراتورهای الکتریکی بزرگ می‌سازد، استفاده شده است. نتایج نشان می‌دهد این الگوریتم از دو لحاظ زمان محاسباتی و مصرف مواد بهینه است [۳].

الپ[۱] و همکاران به کاربرد مسئله برش موجودی در کارگاه تولیدی میماگ ماکینا[۲] پرداخته‌اند. در این کارگاه هدف مسئله برش موجودی یک بعدی، برش تعداد میله‌ای دلخواه با طولهای دلخواه از یک میله بزرگتر است. شرکت میماگ از میله های برش داده شده در پروژه های عمرانی استفاده می‌کند. الگوریتم ارائه شده در این مقاله، مساله برش موجودی را به صورت برنامه ریزی عدد صحیح تبدیل کرده و به کمک کتابخانه های موجود برای برنامه ریزی عدد صحیح، حل می‌کند[۴].

مرابیتو[۳][۵] و همکاران برای حل مساله برش صفحات مستطیل شکل در صنعت تولید و برش تخته های فشرده در برزیل جهت تعیین بهترین الگو برای ماشین های برش، از روش‌های بهینه‌سازی موسوم به کاهش ضایعات استفاده کرده‌اند. دستگاههای برش در این صنعت شامل مجموعه ای از دیسک اره‌ها، دستگاه‌های حرکت دهنده و یا نگهدارنده صفحات، و در نهایت بارگیری و تخلیه در ایستگاه مورد نظر می‌باشد. این دستگاه شامل محدودیت های غیر معمول از جمله مرزبندی روی انواع نمونه ها و تفاوت قائل شدن بین بزرگترین و کوچکترین طول اقلام در الگوی برش و همچنین محدودیت‌های معمولی مانند در دسترس بودن اره طولی و عرضی، متعامد و دستگاه گیوتینی دو مرحله‌ای بدون پیرایش است. برای این منظور از روش تولید ستون دو فازی استفاده شده است تا بتواند یک فرمول برای صنعت برش تخته‌های فشرده توصیف نماید. هر فاز از پردازش با یک برنامه ریزی عدد صحیح مدل شده است که توسط دو روش جایگزین پاسخ داده می‌شود. روش اول بر اساس برنامه ریزی پویا و روش دوم بر اساس توسعه‌ای ساده از روش شمارش ضمنی ارائه شده توسط گیلمور و گوموری است [۵].

۱-۳-۱ طبقه بندی مسائل برش موجودی

کاربردهای متنوع و زیاد مساله برش موجودی باعث شده است دایکوف[۴][۶] یک طبقه‌بندی برای مسائل برش موجودی و بسته بندی (مسائل بسته بندی به شدت مرتبط با مسائل برش موجودی هستند) ارائه دهد. او مسائل را با استفاده از ۴ مشخصه به شرح جدول ۱-۲ طبقه بندی نموده است.

مسائل برش موجودی ابتدا با مساله یک بعدی معرفی شده‌اند. به عنوان مثال در مساله‌ای که هدف آن برش تعداد زیادی سفارش نسبتاً کوچک از چندین قطعه همسان است، خروجی توپولوژی دایکوف به صورت (۱/V/I/R)

[۱] Alp [۲] Mimag Makina [۳] Morabito [۴] Dykhoff

جدول ۱-۲: چهار مشخصه طبقه‌بندی مسائل برش موجودی توسط دایکوف

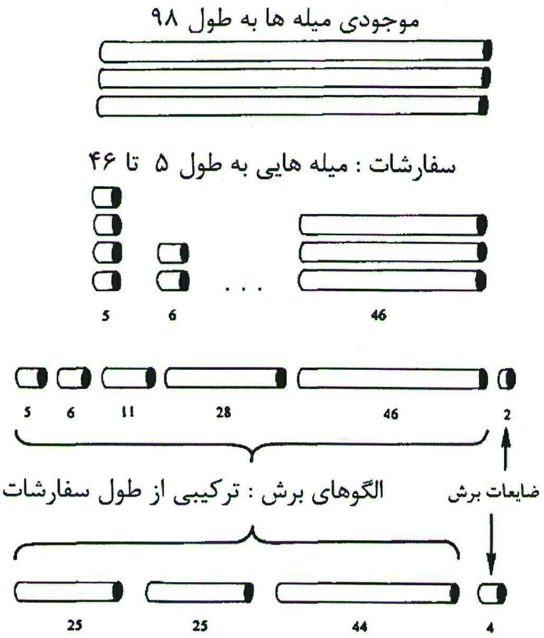
ابعاد	نوع تخصیص	انواع موجودی	سفارشات
تعداد ابعاد (N)	استفاده از همه موجودی برای تولید سفارش‌ها (B) تولید همه سفارشات با بخشی از موجودی (V)	یک جسم بزرگ (O) تعداد زیادی موجودی یکسان (I) موجودی‌های متفاوت (V)	سفارشات کم با ابعاد مختلف (F) سفارشات زیاد با ابعاد زیاد و متفاوت (M) سفارشات زیاد با ابعاد نسبتا کم (R) سفارشات زیاد و یکسان (C)

است، که ۱ به معنای تولید همه سفارشات و بخشی از موجودی، I به معنای تعداد زیادی موجودی یکسان و R به معنای سفارشات زیاد با ابعاد نسبتا کم می‌باشد.

حل مسائل برش موجودی دو بعدی سخت تر از مسائل یک بعدی است زیرا با پیچیدگی بیشتری برای تعیین الگوهای برش امکانپذیر مواجه می‌شویم. از این رو در مسائل برش، تمرکز بیشتر بر روی فرایند تولید الگوها است.

۱-۳-۲ مسائل برش موجودی یک بعدی

مسائل برش موجودی بر اساس ابعاد طبقه بندی می‌شوند. در مساله یک بعدی، برش های صورت گرفته تنها در یک بعد انجام می‌گیرد و سایر ابعاد موجود در نحوه برش بررسی نمی شوند. برای مثال در مقاله آقای هینکسمن [۷] در برش میله‌های فولادی یکسان، سفارشات تنها در طول با یکدیگر متفاوت‌اند و سایر ابعاد مانند ضخامت و یا قطر مشابهت دارند.



شکل ۱-۳: نمایش موجودی، سفارشات، برش لوله‌ها و ضایعات

مثال ۱-۳-۱. با توجه به شکل ۱-۳ موجودی، لوله‌هایی یکسان و به طول ۹۸ است که می‌خواهیم با ایجاد برش هایی به روی آن سفارشاتی به طول ۵ تا ۴۶ تولید کنیم. به ترکیبی از طول‌های سفارش داده شده، الگوی برش گفته می‌شود. اگر مجموع سفارشات ترکیب شده، از طول موجودی بزرگتر شود، الگوی نشدنی و در غیر اینصورت الگو شدنی است. برای نمونه ترکیب سفارشاتی به طول ۲۵ و ۴۴ و به صورت رابطه (۱-۲) الگوی برش شدنی است ولی ترکیب همان سفارشات به صورت رابطه (۱-۳) الگوی نشدنی به وجود می آورد.

$$۲۵ + ۲۵ + ۴۴ = ۹۴ \leq ۹۸ \qquad (۱-۲)$$

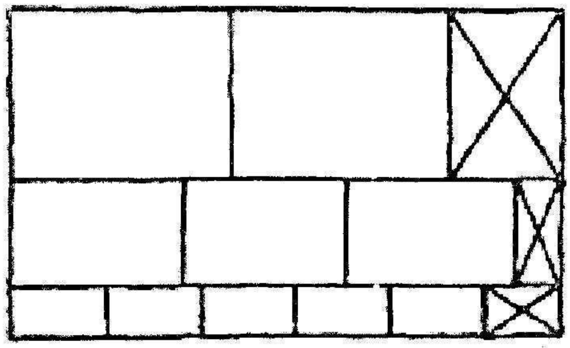
$$۲۵ + ۴۴ + ۴۴ = ۱۱۳ > ۹۸ \qquad (۱-۳)$$

به مقدار باقیمانده پس از برش که غالبا کمتر از کوچکترین سفارش است ضایعات برش گفته می‌شود. بنابراین مقدار ضایعات الگوی برش (۱-۲) برابر ۴ می‌شود.

۱-۳-۳ مسائل برش موجودی دو بعدی مستطیل شکل

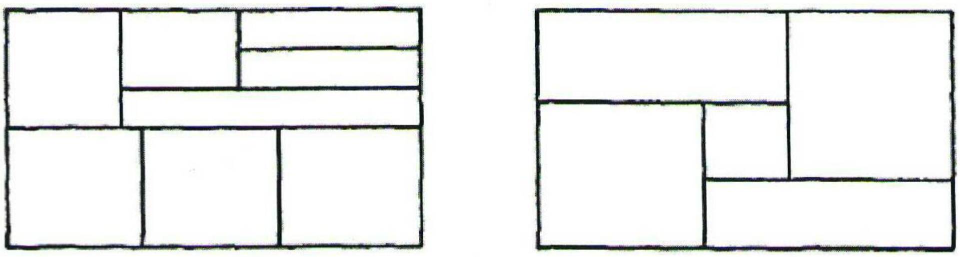
در حالت دو بعدی، موجودی به عنوان ورقه‌هایی مستطیل شکل نگهداری می شود و تقاضای مشتری مستطیل هایی با ابعاد کوچکتر است. ممکن است فرایند برش شامل تعدادی مراحل مجزا باشد که در هر کدام تعدادی

برش موازی در زیر ورقه های حاصل از مرحله قبلی، در زاویه سمت راست برش‌ها در مرحله قبلی، ایجاد می‌شود. این حالت برش دو بعدی دو مرحله‌ای نامیده می‌شود. شکل ۱-۴ برش دو مرحله‌ای را شرح می‌دهد [۷].



شکل ۱-۴: الگوی برش دو مرحله‌ای، X نواحی ضایعات

در برش سه مرحله‌ای، ورقه‌های موجودی به بخش‌ها، بخش‌ها به نوارها و نوارها به قطعات سفارش داده شده، برش برش داده می‌شوند. اگر محدودیتی روی تعداد برشی که به منظور بدست آوردن مستطیل‌های سفارش داده شده می تواند ایجاد شود وجود نداشته باشد و فقط یک محدودیت داشته باشیم که هر برش باید موازی با یک طرف ورق موجودی باشد، مساله به عنوان برش متعامد دو بعدی[۱] نامیده می‌شود. در مواردی مانند شیشه محدودیتی وجود دارد که هر برش باید بصورت برش گیوتینی[۲] ایجاد شود، یعنی باید عرض کامل ورقه‌ها یا برخی زیر ورقه هایی که از برش‌های قبلی تولید شده‌اند، ادامه داده شود. برش‌های متعامد گیوتینی و غیرگیوتینی در شکل ۱-۵ شرح داده شده است [۷].

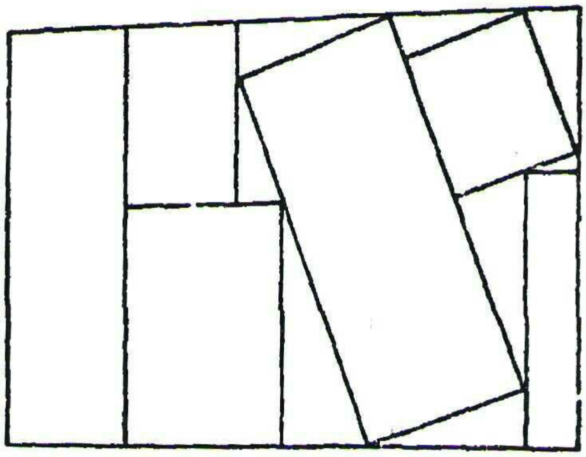


شکل ۱-۵: برش گیوتینی(چپ) و غیرگیوتینی(راست)

دکانی[۳] [۸] معتقد است در برخی موارد با برش های غیر متعامد می توان از موجودی کمتری برای تولید سفارشات، استفاده نمود. مثالی از برش‌های نامتعامد در شکل ۱-۶ شرح داده شده است [۷].

---

[۱] orthogonal 2-dimensional [۲] guillotine [۳] De Cani



شکل ۱-۶: برش نامتعامد

۱-۳-۴ مسائل برش دو بعدی نامنظم

در مقایسه با CSP مستطیلی، تحقیقات زیادی در مورد این مساله انجام نشده است. با این حال صنایع زیادی وجود دارد که در آنها قطعات تکه ای نامنظم از یک ورق برداشته شده اند، مانند صنایع پوشاک، برش کفش چرم، مبلمان، چاپ جعبه کاغذ، صنایع هوا فضا و هر صنعتی که در آن محصول نهایی از ورق کامپوزیتی ساخته شده است.

به طور خاص، CSP نامنظم که اغلب "مساله تو در تو" نامیده می‌شود، اهمیت خاصی در صنعت هوافضا دارد[۹]. تخمین زده شده است که حذف یک سوم از ضایعات برداشت، باعث صرفه جویی سالیانه میلیون ها دلار خواهد بود. استفاده روزافزون از کامپوزیت‌ها در هوافضا و سایر صنایع، تقاضا برای راه حل خوب CSP را بسیار برجسته می کند. اما مساله با محدودیت هایی که بر روی دانه یا جهت پیچ و تاب کامپوزیت ها تحمیل می شود پیچیده است.

یکی از اولین تلاش ها برای حل CSP نامنظم، این است که شکل های نامنظم را به صورت جداگانه یا ترکیبی در داخل ماژول های (واحدهای) مستطیلی دارای حداقل مساحت قرار دهیم [۱۰]. سپس ماژول ها به منظور بهینه سازی تابع هدف (معمولا برای به حداکثر رساندن استفاده از ورق) با هم در ورق اولیه بسته بندی می شوند. در زمینه برنامه نویسی پویا در مرحله اول الگوریتم، هر قطعه نامنظم را در یک مستطیل مستقل با مقادیر افزایشی اختصاص می دهد، با این که مناطق باقیمانده قبلا بهینه شده اند. بدین ترتیب برای حداکثر مقدار تخصیص یک فرمول بازگشتی بدست می آید.

۱-۳-۵ فرمول بندی مسائل برش موجودی

اولین مدل ریاضی مسئله برش توسط، کانتروییچ[1] در سال ۱۹۳۹ ارائه گردید. اگرچه این مدل در سال ۱۹۶۰ منتشر شد، با تحقیق و بررسی‌های علمی صورت گرفته در مورد این مسئله فرمول ها و روش های حل متفاوتی برای مسائل برش ارائه شده است [۱۱، ۱۲، ۱۳]. کانترویچ برای مسئله برش یک بعدی با تقاضا، مدلی را بیان می‌کند که برای حل آن، باید تمامی الگوهای برش یک میله به قطعات مورد نیاز شناسایی شوند، که این امر تنها برای مسائل بسیار کوچک عملی خواهد بود.

لذا گیلمور و گوموری[2] [۱۴] مسئله برش موجودی را به عنوان یک مسئله برنامه عدد صحیح فرمول‌بندی کردند که در آن متغیرهای تصمیم‌گیری تعداد دفعاتی که هر الگوی برش استفاده می‌شود، هستند. در مسئله برش موجودی هنگامی که تعداد اقلام مورد نیاز افزایش می‌یابد، تعداد الگوهای ممکن و متغیرهای تصمیم گیری به صورت نمایی افزایش می‌یابد. بنابراین، گیلمور و گوموری ابتدا الگوهای برش مفید را به وسیله حل یک مسئله کمکی، تولید می‌کنند سپس آنها برنامه‌ریزی خطی ساده شده را حل می‌کنند و فرآیند گرد کردن را یک راه‌حل غیر صحیح معمول اعمال می‌کنند [۱۵]. این رویکرد اکتشافی اغلب به یک راه حل صحیح بهینه منتج می‌شود. این الگوریتم همچنین به عنوان الگوریتم تولید ستون شناخته شده است.

با استفاده از این روش آنها مساله برش دو بعدی را به عنوان مساله برش یک بعدی دو مرحله‌ای در نظر گرفتند که در آن، اولین برش، موازی با یکی از اضلاع و سپس هر برش، عمود بر برش اول است. روش حل آنها بر مبنای برنامه ریزی عدد صحیح با تکنیک ایجاد ستون است. هر ستون، یک الگوی برش شدنی را ارائه می‌کند؛ الگویی که از طریق حل یک مساله کوله پشتی دو بعدی ایجاد می شود [۱۶].

۱-۴ فرمول بندی استاندارد مسئله برش موجودی

فرمول استاندارد برای مساله برش با لیستی از سفارش آغاز می‌شود، هر سفارش به تعداد مورد نیاز است. سپس لیستی از تمام ترکیبات ممکن برش‌ها (الگو) ساخته می شود، برای هر الگو متغیر صحیح مثبت x_j نشان می‌دهد چه تعداد از الگو j مورد استفاده قرار گرفته است. فرمول‌بندی مساله برنامه ریزی خطی عدد صحیح با فرمول (۱-۴) تعریف می‌شود. در این رابطه a_{ij} نشان دهنده تعداد دفعاتی است که سفارش i در الگوی j ظاهر می شود

[1] Kantorvich [2] Gilmore and Gomory

و C_j هزینه (اغلب ضایعات) الگوی j و d_i حداقل میزان سفارش i است.

$$Z = \min \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \tag{۱-۴}$$

$$s.t \quad \sum_{j} a_{ij} x_j \geq d_i \qquad \forall i \in [1..m], \tag{۱-۵}$$

$$x_j \geq 0 \quad and \quad integer$$

محدودیت مقدار در فرمول بالا محدودیت مینیمم است (یعنی با توجه به محدودیت (۱-۵) حداقل مقدار داده شده از هر سفارش باید تولید شود). فرمول کلی‌تر این مساله دارای محدودیت دو طرفه (کران بالا و پایین) است (و در این حالت ممکن است کوچکترین قطعه برش ما از کوچکترین قطعه ضایعات کمتر باشد). بنابراین، در فرمول بالا محدودیت (۱-۶) را جایگزین محدودیت (۱-۵) کرد.

$$dl_i \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq DU_i \quad \forall i \in [1..m] \tag{۱-۶}$$

رابطه (۱-۶) علاوه بر مسائل برش یک بعدی، برای مسائل با بیش از یک بعد و یا مسائل بیشینه‌سازی ارزش تولید براساس سفارشات با ارزش‌های متفاوت، قابل استفاده است. در این رابطه dl_i و DU_i کران های پایینی و بالایی برای سفارش i و مجوز مقدار تولید آن سفارش درون یک محدوده مشخص هستند. برای اینکه عناصر a_{ij} الگوی برش قابل اعمال در طول موجودی را تشکیل دهند، باید محدودیت برآورده شود.

$$\sum_{i} a_{ij} l_i \leq L, \tag{۱-۷}$$

$$a_{ij} \geq 0 \quad and \quad integer$$

۱-۵ مسأله کوله‌پشتی

مسأله کوله‌پشتی [1]، مسأله‌ای در بهینه‌سازی ترکیبیاتی است. فرض کنید مجموعه‌ای از اشیاء که هر کدام داری وزن و ارزش خاصی هستند در اختیار دارید. می‌خواهیم تعدادی از اشیاء را به گونه‌ای انتخاب کنیم که وزن اشیا انتخاب شده کوچکتر یا مساوی مقدار از پیش تعیین شده و ارزش آنها بیشینه شود. علت نام‌گذاری این مسأله،

[1] Knapsack Problem

جهانگردی است که کوله‌پشتی‌ای با اندازه محدود دارد و باید آن را با مفیدترین صورت ممکن از اشیاء پر کند.

فرض کنید n جسم x_i داریم که از ۱ تا n شماره گذاری شده‌اند. جسم iام ارزشی معادل v_i و وزنی برابر با w_i دارد. معمولاً فرض می‌شود که وزن‌ها و ارزش‌ها نامنفی‌اند. برای ساده تر شدن نمایش، بدون کم شدن از کلیت مسأله می‌توان فرض کرد اشیا به ترتیب صعودی بر حسب وزنشان مرتب شده‌اند. بیشترین وزنی که می توان در کوله‌پشتی حمل کرد، W است. بنابراین می‌توان مسأله کوله‌پشتی را به صورت ۱-۸ فرمول‌بندی نمود[۱۷]

$$
\begin{aligned}
K &= \max \sum_{i}^{n} v_i x_i \\
s.t. &\sum_{i}^{n} w_i x_i \leq W \\
&x_i \geq \text{۰ و صحیح}
\end{aligned}
\tag{۱-۸}
$$

در رابطه ۱-۸ اگر $x_i \in [۰, ۱]$ باشد، مسأله را کوله‌پشتی صفر و یک می‌نامیم. در این حالت از هر کالا تنها یک عدد موجود است که می‌توان آن را انتخاب نمود ($x_i = ۱$) و یا اینکه آن را انتخاب نکرد ($x_i = ۰$).

اگر از هریک کالاهای موجود تعداد محدودی را بتوان انتخاب کرد ($x_i \in \{۰, ۱, \cdots, c_{x_i}\}\ ,\ c_{x_i} \geq ۰$) مسأله را کوله‌پشتی کراندار می‌نامند و در غیر این صورت کوله‌پشتی بیکران نامیده می‌شود که در این حالت هیچ محدودیتی روی تعداد اشیاء وجود ندارد و از هر شی، به هر تعداد دلخواهی می‌توان انتخاب کرد. برای حل این مسأله می‌توان از روش‌های مختلفی استفاده کرد. از جمله این روش‌ها می‌توان به الگوریتم ژنتیک، روش حریصانه، برنامه‌ریزی پویا، روش شاخه و برش و ... اشاره نمود.

در روش حریصانه ابتدا ارزش هر واحد وزنی از کالاهای موجود را با تقسیم ارزش هر کالا را بر وزن آن ($\frac{v_i}{w_i}$) محاسبه می‌کنیم. سپس ارزش‌های وزنی محاسبه شده را به ترتیب نزولی (بزرگ به کوچک) مرتب می‌نماییم. در این مرحله با توجه به مقدار موجودی از هر کالا و به ترتیب بیشترین ارزش وزنی، کوله را پر می کنیم تا زمانی که مجموع وزن کالاهای قرار گرفته در کوله از گنجایش آن بیشتر نشده باشد. از آنجایی که کالاهای انتخاب شده را بر اساس بیشترین ارزش وزنی انتخاب کردیم بنابراین در پایان ارزش کوله پرشده بیشینه است.

در روش برنامه‌ریزی پویا روال کار به این صورت است که ابتدا مسأله بزرگ را به یک سری از مسائل کوچکتر و قابل حل‌تر تقسیم می‌کنیم، سپس از مسائل کوچکتر شروع به حل نموده و حاصل را در یک مکان ذخیره می‌نماییم و به تدریج به حل مسأله اصلی (بزرگترین مسأله) می‌پردازیم. در مسأله کوله‌پشتی صفر و یک اگر فرض کنیم A یک زیر مجموعه بهینه از n قطعه موجود باشد، دو حالت امکان‌پذیر است:

۱. A حاوی قطعه n ام هست که در این صورت ارزش کل برابر است با $v_n + \sum_{i=۱}^{n-۱} v_i$ البته به شرط آنکه

رابطه وزنی: $W \geq w_n + \sum_{i=1}^{n-1} w_i$ برقرار باشد.

۲. A حاوی قطعه n ام نیست که در این حالت ارزش A با ارزش زیرمجموعه‌ای بهینه از $n-1$ قطعه اول برابر است. به عبارت دیگر اگر $K(i,w)$ ارزش بهینه حاصل از انتخاب i قطعه اول باشد به گونه‌ای که وزن آن از $K(i,w)$ بیشتر نشود داریم:

$$K(i,w) = \max\{K(i-1, W-w_i) + v_i, K(i-1,w)\}$$

می‌توان شبه کد زیر را برای مساله کوله پشتی صفر و یک به روش پویا در نظر گرفت:

$for\ \ w = 0\ \ to\ W\ \ do$

$\quad K(0,w) = 0$

end

$for\ \ i = 1\ \ to\ n\ \ do$

$\quad K(i,0) = 0$

$\quad for\ \ w = 1\ \ to W\ \ do$

$\quad\quad if\ \ w_i \leqslant W\ \ then$

$\quad\quad\quad if\ \ v_i + K(i-1, w-w_i) \geqslant K(i-1,w)\ \ then$

$\quad\quad\quad\quad K(i,w) = v_i + K(i-1, w-w_i)$

$\quad\quad\quad else$

$\quad\quad\quad\quad K(i,w) = K(i-1,w)$

$\quad\quad\quad end$

$\quad\quad else$

$\quad\quad\quad K(i,w) = K(i-1,w)$

$\quad\quad end$

مثال ۱-۵-۱. دزدی قصد سرقت از خانه‌ای را دارد و حداکثر وزن ۷ کیلو گرم از اجناس را که می‌تواند بدزد. در این خانه ۴ نوع جنس وجود دارد. اگر وزن جنس iام w_i و قیمت آن v_i باشد که در جدول زیر داده شده است؛

ارزش (v_i)	وزن (w_i)	item(i)
۱	۱	۱
۴	۳	۲
۵	۴	۳
۷	۵	۴

بیشینه سودی که بدست می‌آورد چقدر است؟

برای حل این کوله پشتی صفر ویک با استفاده از الگوریتم ارائه شده، ماتریس $K(i,w)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{array}{cc} w \rightarrow & \begin{array}{cccccccc} ۰ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ \end{array} \\ K = & \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۴ & ۵ & ۵ & ۵ & ۵ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۴ & ۵ & ۶ & ۶ & ۹ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۴ & ۵ & ۷ & ۸ & ۹ \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \downarrow \mathrm{i} \\ ۰ \\ ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۴ \end{array}$$

به عنوان نمونه $K(۳,۵)$ به صورت زیر به محاسبه می‌شود:

$$i = ۳, \quad w = ۵, \quad w_۳ = ۴, \quad v_۳ = ۵,$$

$$K(۳,۵) = \max\{۵ + k(۲,۲),\ K(۲,۵)\} = \max\{۵ + ۱,\ ۵\} = ۶.$$

ماتریس به دست‌آمده نشان می‌دهد که حداکثر سود ۹ است که از برداشتن آیتم‌های ۲و ۳ به دست می‌آید.

فصل ۲

الگوریتم ژنتیک و تکنیک تولید ستون

۲-۱ مقدمه

درپژوهش حاضر برآنیم تا مساله CSP دو مرحله‌ای را با استفاده از تکنیک تولید سطر و ستون و الگوریتم ژنتیک بیابیم. برای این منظور، در این فصل به ارائه معرفی اجمالی از الگوریتم ژنتیک می‌پردازیم. همچنین از آنجا که روش تولید سطر و ستون، در واقع تعمیمی از تکنیک تولید ستون است، لازم است تا مختصری با این تکنیک آشنا شویم.

۲-۲ ساختار الگوریتم ژنتیک

در مدل‌سازی، الگوریتم ژنتیک یک تکنیک برنامه‌نویسی است که از تکامل ژنتیکی به عنوان یک الگوی حل مسئله استفاده می‌کنند. الگوریتم ژنتیک نوع خاصی از الگوریتم‌های تکامل است که از تکنیک‌های زیست‌شناسی فراگشتی مانند وراثت، جهش زیست‌شناسی و اصول انتخابی داروین برای یافتن فرمول بهینه جهت پیش‌بینی یا تطبیق الگو استفاده می‌شود.

مسئله‌ای که باید حل شود دارای ورودی‌هایی می‌باشد که طی یک فرایند الگوبرداری شده از تکامل ژنتیکی به راه‌حل‌ها تبدیل می‌شود سپس راه حل‌ها به عنوان کاندیداها توسط ارزیاب مورد ارزیابی قرار می‌گیرند و چنانچه شرط خروج مسئله فراهم شده باشد الگوریتم خاتمه می‌یابد. بطور کلی یک الگوریتم مبتنی بر تکرار است که اغلب بخش‌های آن به صورت فرایندهای تصادفی انتخاب می‌شود. الگوریتم‌های ژنتیک برای روش‌های کلاسیک بهینه‌سازی در حل مسائل خطی، محدب و برخی مشکلات مشابه بسیار موفق بوده‌اند ولی الگوریتم‌های ژنتیک

برای حل مسائل گسسته و غیر خطی بسیار کاراتر می‌باشند. به عنوان مثال می‌توان به مسئله فروشنده دوره‌گرد اشاره کرد. در طبیعت از ترکیب کروموزوم‌های بهتر، نسل‌های بهتری پدید می‌آیند. در این بین گاهی اوقات جهش‌هایی نیز در کروموزوم‌ها روی می‌دهد که ممکن است باعث بهتر شدن نسل بعدی شوند. الگوریتم ژنتیک نیز با استفاده از این اقدام شروع به حل مسائل می‌کند. روند استفاده از الگوریتم‌های ژنتیک به صورت زیر می‌باشد:

۱. معرفی جواب‌های مسئله به عنوان کروموزوم

۲. معرفی تابع برازندگی

۳. جمع‌آوری اولین جمعیت

۴. معرفی عملگرهای انتخاب

۵. معرفی علمگرهای تولید مثل

یک راه حل برای مسئله مورد نظر، با یک لیست از پارامترها نشان داده می‌شود که به آن‌ها کروموزوم یا ژنوم می‌گویند. کروموزوم‌ها عموماً به صورت یک رشته ساده از داده‌ها نمایش داده می‌شوند، البته انواع ساختمان داده‌های دیگر هم می‌تواند برای نمایش آنها استفاده شود. شکل ۲-۱ یک کروموزم رانشان می‌دهد.

0	1	1	0	1	0	0	1
g0	g1	g2	g3	g4	g5	g6	g7

شکل ۲-۱: شکل یک کروموزم

ارزش هریک از آنها توسط تابع برازندگی(ارزیاب) اندازه‌گیری می‌شود.

گام بعدی ایجاد دومین نسل از جامعه است که بر پایه فرایندهای انتخاب و تولید از روی مشخصه‌های انتخاب شده با عملگرهای ژنتیکی است، انجام می‌شود(اتصال کروموزوم‌ها به سر یکدیگر و تغییر). برای هر فرد، یک جفت والد انتخاب می‌شود. انتخاب‌ها به گونه‌ای‌اند که مناسب ترین عناصر انتخاب شوند تا حتی ضعیف‌ترین عناصر هم‌شانس انتخاب داشته باشند تا از نزدیک شدن به جواب محلی جلوگیری شود. چندین الگو انتخاب وجود دارد: چرخ منگه‌دار (رولت)، انتخاب مسابقه‌ای و ...

اتصال دو کروموزوم فرزند ایجاد می‌کند، که به نسل بعدی اضافه می‌شوند. این کارها انجام می‌شوند تا این که کاندیدهای مناسبی برای جواب، در نسل بعدی پیدا شوند. مرحله بعدی تغییر دادن فرزندان جدید است. کروموزوم‌های فرزند به‌طور تصادفی تغییر می‌کنند یا جهش می‌یابند. این فرایند باعث به وجود آمدن نسل جدیدی

از کروموزوم‌هایی می‌شوند، که با نسل قبلی متفاوت است. فرایند تکرار می‌شود تا این که به آخرین مرحله برسیم.
شرایط خاتمه الگوریتم‌های ژنتیک عبارتند از :

به تعداد ثابتی از نسل‌ها برسیم.

بودجه اختصاص داده شده تمام شود (زمان محاسبه پول).

یک فرد (فرزند تولید شده) پیدا شود که مینیمم (کمترین) ملاک را برآورده کند.

بیشترین درجه برازش فرزندان حاصل شود یا دیگر نتایج بهتری حاصل نشود.

بازرسی دستی.

۱-۲-۲ تابع برازندگی

به منظور حل هر مسئله با استفاده از الگوریتم‌های ژنتیک، ابتدا باید یک تابع برازندگی[۱] برای آن مسئله ابداع شود. برای هر کروموزوم، این تابع عددی غیر منفی را بر می‌گرداند که نشان دهنده شایستگی یا توانایی فرد (کروموزوم) است.

تابع برازندگی از اعمال تبدیل مناسب بر روی تابع هدف یعنی تابعی که قرار است بهینه شود به دست می‌آید. این تابع هر رشته را با یک مقدار عددی ارزیابی می‌کند که کیفیت آن را مشخص می‌نماید. هر چه کیفیت رشته جواب بالاتر باشد مقدار برازندگی جواب بیشتر است و احتمال مشارکت برای تولید نسل بعدی نیز افزایش خواهد یافت. بسته به اینکه مسأله مورد نظر بیشینه‌سازی یا کمینه‌سازی باشد برازندگی بیشتر مترادف با بیشینه یا کمینه بودن تابع هدف خواهد بود. از آنجایی که الگوریتم ژنتیک با جستجو در فضای کروموزوم‌ها به دنبال بیشینه تابع برازندگی است [۱۸]، باید مسائل کمینه سازی به بیشینه‌سازی تبدیل شود.

چندین روش برای تبدیل تابع هدف به تابع برازندگی وجود دارد. ساده ترین روش مساوی قرار دادن تابع برازندگی با تابع هدف است. این روش در مسائلی که تابع هدف بایستی بیشینه شود مناسب است. برای تبدیل مسائل کمینه‌سازی روش‌های مختلفی وجود دارد، با فرض اینکه مقدار تابع هدف معادل فردiام ϕ_i باشد، ساده‌ترین روش، کم کردن ϕ_i از یک مقدار ثابت C است به طوری که به ازای تمام نسل‌ها $\phi_i < C$ باشد. در این صورت ϕ_i مقدار کمینه است اگر به ازای آن f_i بیشینه باشد:

$$f_i = C - \phi_i.$$

در صورتی که نتوانیم بزرگترین مقدار تابع هدف را به صورت تقریبی بیابیم، می‌توانیم در هر نسل $\phi_{\max}$ و $\phi_{\min}$

[۱] Merit function

یافته و برازندگی را به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$f_i = (\phi_{\max} - \phi_{\min}) - \phi_i.$$

روش دیگری، استفاده از تابع نمایی $f_i = e^{-\phi_i}$ است.

۲-۲-۲ عملگرهای ژنتیکی

عملگر انتخاب

عملگر انتخاب [۱] از بین کروموزوم‌های موجود در یک جمعیت، تعدادی کروموزوم را برای تولید مثل انتخاب می‌کند. کروموزوم‌های برازنده‌تر شانس بیشتری دارند تا برای تولید مثل انتخاب شوند [۱۸].

در مرحله انتخاب، یک جفت از کروموزوم‌ها برگزیده می‌شوند تا با هم ترکیب شوند. عملگر انتخاب رابط بین دو نسل است و بعضی از اعضای نسل کنونی را به نسل آینده منتقل می‌کند، بعد از انتخاب،عملگرهای ژنتیک روی دو عضو برگزیده اعمال می‌شوند، معیار انتخاب اعضاء ارزش تطابق آنهاست اما روند انتخاب حالتی تصادفی داردو شاید انتخاب مستقیم و ترتیبی به این شکل که بهترین اعضاء دو به دو انتخاب شوند در نگاه اول روش مناسبی به نظر برسد اما باید به نکته‌ای توجه داشت، در الگوریتم ژنتیک ما با انتخاب ژن‌ها رو به رو هستیم، یک عضو با تطابق پایین اگرچه در نسل خودش عضو مناسبی نیست اما ممکن است شامل ژن‌ها خوب باشد و اگر شانس انتخاب شدنش صفر باشد، این ژن‌های خوب نمیتوانند به نسل‌های بعدی منتقل شوند. پس روش انتخاب باید به گونه‌ای باشد که به این عضو نیز شانس انتخاب شدن داده شود. راه‌حل مناسب، طراحی روش انتخاب به گونه‌ای است که احتمال انتخاب شدن اعضای با تطابق بالاتر بیشتر باشد. انتخاب باید به گونه‌ای صورت گیرد که تا حد ممکن هر نسل جدید نسبت به نسل قبلی‌اش تطابق بالاتری بیشتر باشد. انتخاب باید به گونه‌ای صورت گیرد که تا حدممکن هر نسل جدید نسبت به نسل قبلی‌اش تطابق میانگین بهتری داشته باشد.

دو روش متداول انتخاب عبارت‌اند از انتخاب چرخ رولت [۲] و نخبه سالاری [۳] که در ادامه به آن می‌پردازیم

۱. انتخاب چرخ رولت

انتخاب چرخ رولت که اولین باز توسط هولند [۴] پیشنهاد شد یکی از مناسب‌ترین انتخاب‌های تصادفی بوده که ایدهٔ آن، احتمال انتخاب است. احتمال انتخاب متناظر با هر کروموزوم، براساس برازندگی آن محاسبه

---

[۱] Selection [۲] Roulette wheel selesction [۳] Elitist Selection [۴] John Henry Holland

شده که اگر f_k مقدار برازندگی کروموزوم kام باشد، احتمال بقای متناظر با آن کروموزوم عبارت است از:

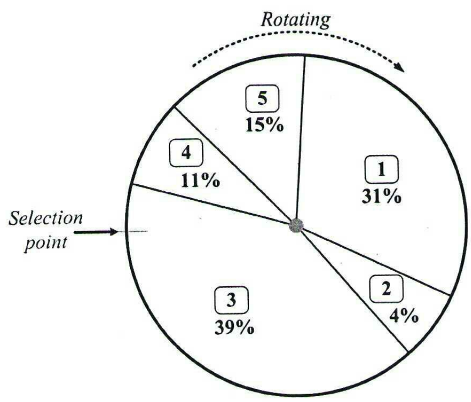
$$p_k = \frac{f_k}{\sum_i^n f_i}. \tag{۲-۱}$$

رابطه (۲-۱) احتمال انتخاب در روش چرخ رولت است.

اکنون کروموزوم‌ها را براساس p_k مرتب کرده و q_k که همان مقادیر تجمعی p_k است، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$q_k = \sum_{i=1}^{k} p_i. \tag{۲-۲}$$

چرخ رولت برای انتخاب هر کروموزوم یک عدد تصادفی بین یک و صفر تولید کرده سپس با توجه به بازه‌ای که عدد مذکور در آن قرار می‌گیرد، کروموزوم مربوطه انتخاب می‌شود. البته روش پیاده سازی چرخ رولت به این شکل است که ما یک دایره را در نظر گرفته و آن را به تعداد کروموزوم‌ها طوری تقسیم می‌کنیم که هر بخش متناظر با مقدار برازندگی کروموزوم مربوط باشد، اکنون چرخ را چرخانده و هر کجا که چرخ متوقف شد به شاخص چرخ نگاه کرده، کروموزوم مربوط به آن بخش انتخاب می‌گردد. شکل (۲-۲) نشان می‌دهد که هرچه مقدار برازندگی کروموزومی بیشتر باشد، فضای بیشتری از چرخ رولت را به خود اختصاص می‌دهد؛ بنابراین احتمال انتخاب آن نیز بیشتر می‌شود. انتخاب چرخ رولت، روشی است که نسبت به مقدار تطابق، اعضاء را انتخاب می‌کند. این روش یک چرخ رولت را شبیه‌سازی می‌کند تا تعیین کند کدام اعضاء شانس باز تولید را دارند. هر عضو به نسبت تطابقش، تعدادی از بخش‌های چرخ رولت را به خود اختصاص می‌دهد. سپس در هر مرحله انتخاب یک عضو برگزیده می‌شود و روند آنقدر تکرار می‌شود تا به اندازه کافی، جفت برای تشکیل نسل بعد انتخاب گردد. این روش انتخاب را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:



شکل ۲-۲: نحوه انتخاب کروموزوم برتر توسط چرخ رولت

برداری مانند v در نظر بگیرید:

$$v = [۱, \cdots, M]$$

M تعداد عناصر بردار است. اگر تعداد اعضای مجموعه N باشد، هر عضو i دارای تطابقی مانند f_i است. هر عضو i به نسبت p_i،f_i بار در v تکرار می‌شود. هر چه f_i بیشتر باشد، عضو مکان‌های بیشتری را به خود اختصاص می‌دهد. پس از تشکیل بردار v یک مقدار تصادفی $۱ \leq r \leq M$ انتخاب می‌شود این مقدار به مکانی در بردار اشاره می‌کند که در آن مکان خود معرف عضوی از اعضای جمعیت است.

مثال ۲-۲-۱. فرض کنیم مجموعه‌ای با چهار نوع عنصر مختلف ($n = ۴$) داشته باشیم به صورتی که تعداد اعضای مشابه هر یک از این عناصر به شرح زیر باشد:

$$f_۱ = ۱۰,\ f_۲ = ۱۰,\ f_۳ = ۱۵,\ f_۴ = ۲۵$$

حال می‌خواهیم بدانیم که عدد $r = ۳۲$ (یک عدد تصادفی) منتسب به کدام عنصر است.

برای این منظور، میدانیم مجموع اعضای عناصر عبارت است از :

$$\sum_{i=۱}^{n} f_i = ۶۰$$

بردار v را برداری با ۶۰ عنصر در نظر می‌گیریم. این بردار به صورت زیر پر می‌شود: به عضو ۱، ۱۰ مکان به عضو ۲، ۱۰ مکان به عضو۳، ۱۵ مکان و به عضو ۴، ۲۵ مکان اختصاص می‌یابد.

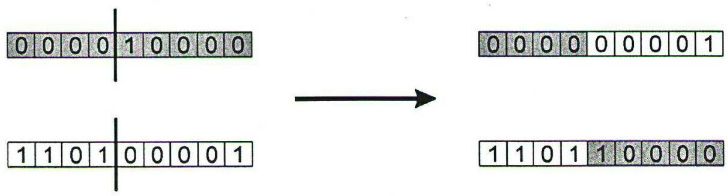
اکنون r بین ۱ تا ۶۰ به تصادف انتخاب می‌شود. فرض کنید $r = ۳۲$ بنابراین بازه سوم انتخاب می‌شود.

۲. انتخاب نخبه گرایی

ایدۀ نخبه سالاری یا نخبه گرایی، ویژگی تازه‌ای به پروسۀ انتخاب اضافه می‌کند، در نخبه سالاری، بهترین عضو هر جمعیت، زنده می‌ماند و در جمعیت بعد حضور دارد، به عبارت دیگر عضوی که بالاترین تطابق را دارد به طور خودکار به جمعیت جدید منتقل می‌شود. این روش ابتدا در سال ۱۹۷۵ توسط کندی جونز معرفی شد، اعمال نخبه سالاری در الگوریتم ژنتیک، معمولاً باعث بهبود کارایی آن می‌شود.

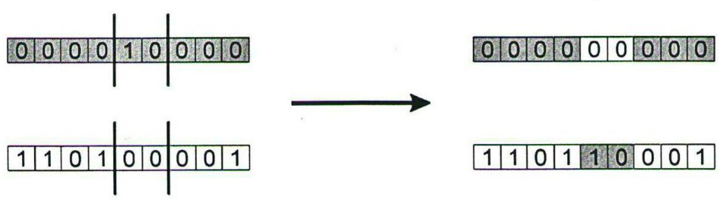
عملگر برش

عملگر برش بر روی یک زوج کروموزوم از نسل مولد عمل کرده و یک زوج کروموزوم جدید تولید می‌کند. این عملگر زیر توالی‌ها دو کروموزوم را با هم مبادله می‌کند [۱۹]. عملگرهای برش متعددی از قبیل، برش تک‌نقطه‌ای[۱] و برش دو نقطه‌ای[۲] وجود دارد.



شکل ۲-۳: برش تک نقطه‌ای

در برش تک‌نقطه‌ای، یک موقعیت تصادفی بین دو ژن در نظر گرفته می‌شود. سپس تمامی ژن‌ها طرف راست با طرف چپ این موقعیت در کروموزوم‌های والد با یکدیگر جابجا می‌شوند تا کروموزوم‌های جدید بدست آیند. در شکل ۲-۳ برش تک نقطه‌ای نشان داده شده است. در برش دو نقطه‌ای، دو موقعیت به صورت تصادفی انتخاب می‌شود و تمامی ژن‌ها بین این دو موقعیت در کروموزوم‌های والد با یکدیگر جابجا می‌شوند. در شکل ۲-۴ برش دو نقطه‌ای نشان داده شده است.



شکل ۲-۴: برش دو نقطه‌ای

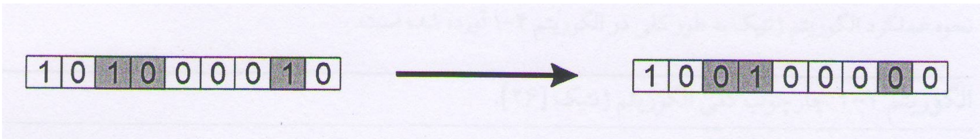
لازم به ذکر است که برش معمولاً برروی همه زوج کروموزوم‌های انتخاب شده برای ترکیب به کار برده نمی‌شود. معمولاً احتمال برش برای هر زوج کروموزوم بین ۰٫۶ تا ۰٫۹۵ در نظر گرفته می‌شود که به این عدد

[۱] One-point Crossover [۲] Two-point Crossover

نرخ برش[1] یا احتمال برش[2] گفته می‌شود و با P_c نمایش داده می‌شود. در صورتی که برروی یک زوج کروموزوم عمل برش صورت نگیرد، فرزندان با تکرار نمودن والدین تولید می‌شود.

عملگر جهش

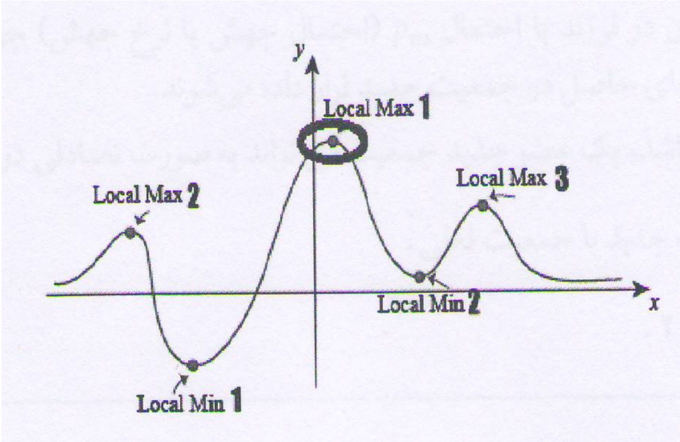
پس از اتمام عمل برش، عملگر جهش بر روی کروموزوم‌ها اثر داده می‌شود. این عملگر برخی بیت‌ها از یک کروموزوم را به طور تصادفی انتخاب نموده و سپس محتوای آن‌ها را تغییر میدهد. اگر ژن از جنس اعداد دودویی باشد، آن را به وارونش تبدیل می‌کند و چنانچه متعلق به یک مجموعه باشد، مقدار یا عنصر دیگری از آن مجموعه را به جای آن ژن قرار می‌دهد. در شکل ۲-۵ چگونگی جهش یافتن ژن سوم، چهارم و هشتم از یک کروموزوم نشان داده شده است.



شکل ۲-۵: شکل یک کروموزوم قبل و بعد از عملگر جهش

به طور کلی جهش از قرار گرفتن الگوریتم ژنتیک در اکسترمم‌های محلی جلوگیری می‌کند. در شکل ۲-۶ نقاط اکسترمم محلی مشخص گردیده است. در این شکل نقطه Lacal Max1 را می‌توان به عنوان نقطه بیشینه سراسری هم تعیین کرد. کاربرد جهش آنجایی دیده می‌شود که فضای جستجوی ما در یکی از تکرارها، اطراف نقاط بیشینه‌های محلی ۲ و یا ۳ باشد. در این صورت فرایند الگوریتم ژنتیک ما را به سمت این پیشینه‌های محلی هدایت می‌کند تا زمانی که با یک جهش تصادفی فضای جستجو را به اطراف نقطه Lacal Max1 تغییر دهد، در این صورت الگوریتم ژنتیک به جستجوی کاملا تصادفی تبدیل خواهد شد.

[1] Crossover Rate [2] Crossover Probability



شکل ۲-۶: مثالی از اکسترمم‌های محلی و سراسری

جهش می‌تواند در هر موقعیت بیتی در یک رشته یا یک احتمال رخ دهد [۱۸]. احتمال انجام عمل جهش برروی هر کروموزوم را نرخ جهش [۱] یا احتمال جهش [۲] می‌گویند. معمولاً این عدد را بسیار کوچک (مثلا۰٫۰۰۱) در نظر می‌گیرند. پس از اتمام عمل جهش، کروموزوم‌های تولید شده به عنوان نسل جدید شناخته شده و برای دور بعد اجرای الگوریتم ارسال می‌شوند.

مثال ۲-۲-۲. در این مثال می‌خواهیم مسئلهٔ ۸ وزیر را بوسیلهٔ الگوریتم ژنتیک حل کنیم. هدف مشخص کردن چیدمانی از ۸ وزیر در صفحهٔ شطرنج است به نحوی که هیچ‌یک همدیگر را تهدید نکند.

ابتدا باید نسل اولیه را تولید کنیم. صفحه شطرنج ۸ در ۸ را در نظر بگیرید. ستونها را با اعداد ۰ تا ۷ و سطرها را هم از ۰ تا ۷ مشخص می‌کنیم. برای تولید حالات (کروموزومهای) اولیه به صورت تصادفی، وزیرها را در ستونهای مختلف قرار می‌دهیم. باید در نظر داشت که وجود نسل اولیه با شرایط بهتر سرعت رسیدن به جواب را افزایش می‌دهد (اصالت نژاد) به همین خاطر وزیر i ام را در خانهٔ تصادفی در ستون i ام $i = ۰, ۱, , ۷$ قرار می‌دهیم (به جای اینکه هر مهره‌ای بتواند در هر خانه خالی قرار بگیرد). با اینکار حداقل از برخورد ستونی وزیرها جلوگیری می‌شود. توضیح بیشتر اینکه مثلاً وزیر اول را بطور تصادفی در خانه‌های ستون اول که با ۰ مشخص شده قرار می‌دهیم تا به آخر. حال باید این حالت را به نحوی کمی مدل کرد. چون در هر ستون یک وزیر قرار دادیم هر حالت را بوسیلهٔ رشته اعدادی که عدد k ام در این رشته شمارهٔ سطر وزیر موجود در ستون i ام را نشان می‌دهد. یعنی یک حالت که انتخاب کردیم می‌تواند به صورت زیر باشد: ۶۷۲۰۳۴۲۲ که ۶ شمارهٔ سطر ۶ است که وزیر اول که شمارهٔ ستونش ۰ است می‌باشد تا آخر. فرض کنید ۴ حالت زیر به تصادف تولید شده‌اند. این چهار حالت

[۱] Rate Mutation [۲] Probability Mutation

را به عنوان کروموزومهای اولیه بکار می‌گیریم.

۱)۶۷۲۰۳۴۲۰

۲)۷۰۰۶۳۳۵۴

۳)۱۷۵۲۲۰۶۳

۴)۴۳۶۰۲۴۷۱

حال نوبت به تابع برازش می‌رسد. تابعی را که در نظر می‌گیریم تابعی است که برای هر حالت تعداد برخوردها (تهدیدها) را در نظر می‌گیرد. هدف صفر کردن یا حداقل کردن این تابع است. پس احتمال انتخاب کروموزومی برای تولید نسل بیشتر است که مقدار محاسبه شده توسط تابع برازش برای آن کمتر باشد. مقدار برازش برای حالات اولیه به صورت زیر می‌باشد: (مقدار عدد برازش در جلوی هر کروموزوم همان تعداد برخوردهای وزیران می‌باشد.)

۱)۶۷۲۰۳۴۲۰ $\longrightarrow$ ۶

۲)۷۰۰۶۳۳۵۴ $\longrightarrow$ ۸

۳)۱۷۵۲۲۰۶۳ $\longrightarrow$ ۲

۴)۴۳۶۰۲۴۷۱ $\longrightarrow$ ۴

در اینجا کروموزومهایی را انتخاب می‌کنیم که برازندگی کمتری دارند. پس احتمالها به صورت زیر است:

$$p(۳) > p(۴) > p(۱) > p(۲)$$

پس کروموزوم ۳ برای عملگر برش تک نقطه‌ای با کروموزومهای ۴ و ۱ انتخاب می‌شود. نقطهٔ ترکیب را بین ارقام ۶ و ۷ در نظر می‌گیریم.

۴ و ۳:

۵)۱۷۵۲۲۰۷۱

۶)۴۳۶۰۲۴۶۳

۱ و ۳:

۷)۱۷۵۲۲۰۲۰

۸)۶۷۲۰۳۴۶۳

حال نوبت به جهش می‌رسد. در جهش باید یکی از ژن‌ها تغییر کند.

فرض کنید از بین کروموزومهای ۵ تا ۸ کروموزوم شمارهٔ ۷ و از بین ژن‌های آن، ژن چهارم از ۲ به ۳ جهش یابد. پس نسل ما شامل کروموزومهای زیر با امتیازات نشان داده شده می‌باشد: (امتیازات تعداد برخوردها می‌باشد)

۱)۶۷۲۰۳۴۲۰ $\longrightarrow$ ۶

۲)۷۰۰۶۳۳۵۴ $\longrightarrow$ ۸

۳)۱۷۵۲۲۰۶۳ $\longrightarrow$ ۲

۴)۴۳۶۰۲۴۷۱ $\longrightarrow$ ۴

۵)۱۷۵۲۲۰۷۱ $\longrightarrow$ ۶

۶)۴۳۶۰۲۴۶۳ $\longrightarrow$ ۴

۷)۱۷۵۳۲۰۲۰ $\longrightarrow$ ۵

۸)۶۷۲۰۳۴۶۳ $\longrightarrow$ ۵

کروموزوم ۳ کاندیدای خوبی برای ترکیب با ۶ و ۷ می‌باشد. (فرض کنید در این مرحله جهشی صورت نگیرد و نقطهٔ اتصال بین ژنهای ۱ و ۲ باشد)

۹)۱۳۶۰۲۴۶۳ $\longrightarrow$ ۲

۱۰)۴۷۵۲۲۰۶۳ $\longrightarrow$ ۲

۱۱)۱۷۵۲۲۰۲۰ $\longrightarrow$ ۴

۱۲)۱۷۵۲۲۰۶۳ $\longrightarrow$ ۲

کروموزومهای از ۹ تا ۱۲ را نسل جدید می‌گوییم. بطور مشخص کروموزوم‌های تولید شده در نسل جدید به جواب مسئله نزدیکتر شده‌اند. با ادامهٔ همین روند پس از چند مرحله به جواب مورد نظر خواهیم رسید.

۲-۳ تکنیک تولید ستون

تولید ستون، روشی کلاسیک برای حل مسائل برنامه ریزی خطی از طریق اضافه کردن مکرر متغیرهای لازم به مساله اولیه است و روشی سیستماتیک برای حل مسائل بزرگ مقیاس یا برنامه‌های خطی با ساختار ویژه است[۲۰]. به طور معمول تنها بخش کوچکی از متغیرها برای بهبود بهینگی مورد نیاز هستند. محدودیت‌ها به دو دسته تقسیم می‌شوند: محدویت‌های مشترک و محدودیت‌های مستقل. اطلاعات بین دو برنامه خطی تبادل می‌شود تا زمانیکه یک راه حل بهینه برای مسئله اصلی به‌دست آید. برنامه خطی بر روی محدودیت‌های مشترک مسئله اصلی و برنامه خطی بر روی محدودیت‌های مستقل، زیر مسئله نامیده می‌شود. مسئله اصلی به طور منظم مجموعه‌ای از ضرائب هزینه (ارزش‌ها) را به زیر مسئله می‌دهد و از زیر مسئله یک ستون جدید براساس این ضرایب هزینه دریافت می‌کند. به همین دلیل به این روش، تولید ستون می‌گویند.

۲-۳-۱ گام‌های روش تولید ستون

گام اول : یافتن یک جواب موجه ابتدایی برای مسأله اصلی

گام دوم: انتخاب متغییر ورودی

گام سوم: حل مسأله فرعی

مساله فرعی را به منظور تعیین مثبت‌ترین ضریب متغیر غیر اساسی ورودی، حل می‌کنیم. در مساله فرعی برای بدست آوردن Y از رابطه‌ی $Y = (Y_0, Y_1) = c_B B^{-1}$ استفاده می‌نماییم که مقادیر متغیرهای دوگان هستند.

با توجه به متغیرهای دوگان ضریب متغیر ورودی (λ_j) در تابع هدف مساله از رابطه cx_j به‌دست می‌آید.

گام چهارم: بررسی شرط توقف

اگر مقدار $C_j - Z_j$ از دستور زیر، صفر باشد به جواب بهینه رسیده‌ایم. (مقدار متغییرهای اساسی جواب بهینه از رابطه $b = B^{-1}\binom{b_0}{1}$ به دست می‌آید)، در این صورت به گام بعد می‌رویم. $C_j - Z_j$ ضریب متغیر λ_i در هر تکرار و برابر با، $C_j - Z_j = Z' - Y_1$ است.

با توجه به مطالب گفته شده اکنون می‌توانیم الگوریتمی برای حل مسئله برش موجودی یک بعدی با روش تولید ستون ارائه نماییم:

الگوریتم ۲-۱ خلاصه روش تولید ستون برای CSP یک بعدی

۱: مسئله را به فرم LP تعریف می‌کنیم.
۲: متغیر های سطر هدف را به دو قسمت پایه و غیرپایه تقسیم می‌کنیم.
۳: با استفاده از ستون‌های نظیر متغیرهای پایه، ماتریس پایه در جدول فعلی (B) را تعیین نموده و معکوس آن را محاسبه می‌کنیم. (B^{-1})
۴: با استفاده از رابطه $c_B B^{-1}$ ضرایب متغیرهای پایه در سطر هدف را بدست می‌آوریم.
۵: برای تعیین وجود متغیر غیر پایه که قابلیت ورود به پایه را داشته باشد، متغییر های غیر پایه ای را به کمک حل یک مسئله کوله پشتی $c_B B^{-1} a_j - c_j$ ارزش گذاری می نماییم. اگر پاسخ مسئله کوله پشتی کمتر یا مساوی صفر شد جدول فعلی بهینه است و متغیر های غیر پایه ای جدیدی برای ورود به پایه وجود نخواهد داشت.
۶: با ضرب جواب مسئله کوله پشتی در B^{-1} ستون تولید شده جدید را به دست می آوریم.
۷: سمت راست جدول فعلی را به دست می آوریم.
۸: با استفاده از آزمون نسبت سطری که متغیر غیر پایه وارد آن می شود به دست می آوریم.
۹: با استفاده از قائده شکل ضربی وارون و ستون جدید، B^{-1} جدول جدید را تولید می کنیم و به گام ۲ بر می گردیم.

۲-۳-۲ روش تولید ستون در حل مسئله صفحات برش

الگوریتم تولید ستون برای حل مسائل برنامه ریزی خطی با تعداد متغیر های خیلی بزرگ طراحی شده است. این الگوریتم برای پیدا کردن متغیر ورودی به متغیر های پایه استفاده می‌شود. ایده اصلی استفاده از روش تولید ستون اولین بار توسط گیلمور و گوموری در سال ۱۹۶۱ بیان شد[۲۰]. با این حال نمی‌توان واژه و اصطلاح تولید ستون را در این مقاله و یا مقاله های متعاقب آن یعنی مقاله دانزیگ ولف و مقاله گیلمور گوموری پیدا کرد.
اولین بار این اصطلاح در مقاله ای با عنوان الگوریتم تولید ستون برای یک مساله برنامه ریزی کشتی دیده شد. اما معمولا این روش را به گیلمور و گوموری(۱۹۶۱) منتسب می‌کنند. این الگوریتم باعث افزایش کارایی روش سیمپلکس اصلاح شده می‌شود. برای توضیح این روش مثال CSP زیر را بررسی می‌کنیم. لازم به ذکر است که این مثال از کتاب تحقیق در عملیات وینستون [۲۱] برداشته شده است.

مثال ۲-۳-۱. شرکت وودکو [1] چوب به قطعات ۳ ,۵ و ۹ فوتی می فروشند. مشتریان شرکت، ۲۵ قطعه ۳ فوتی، ۲۰ قطعه ۵ فوتی، ۱۵ قطعه ۹ فوتی درخواست کرده اند. باید تقاضای مشتریان را از برش قطعات ۱۷ فوتی چوب تامین کند.

ابتدا یک مسئله LP می نویسیم که مقدار ضایعات را حداقل کند. سپس این مسئله را به روش تولید ستون حل می کنیم. ابتدا شرکت باید مشخص کند چگونه قطعات ۱۷ فوتی چوب را برش دهد. برای مثال اگر یک قطعه

[1] Woodco

۱۷ فوتی را به سه قطعه ۵ فوتی برش دهد، آنگاه $۲ = ۱۵ - ۱۷$ فوت ضایعات این تصمیم خواهد بود. بسیاری از الگوها می توانند کنار گذاشته شوند. مثلا عاقلانه نخواهد بود اگر از یک قطعه ۱۷ فوتی فقط دو قطعه ۹ و ۵ فوتی را با ۳ فوت ضایعات $(۳ = ۵ - ۹ - ۱۷)$ در نظر بگیریم و بهتر است آن را به صورت ۵ ، ۹ و ۳ فوتی مورد بررسی قرار دهیم که ضایعاتی ندارد. به طور کلی هر برش را که ضایعات آن بزرگتر از سه فوت یا مساوی آن باشد، می توان کنار گذاشت؛ زیرا می توان ضایعات را برای قطعات کوچکتر به کار گرفت. جدول (۲-۱) لیستی از روش های مناسب یا معقول برش را ارائه می دهد.

جدول ۲-۱: الگوهای مختلف برش قطعه‌ها

طرح برش	مقدار ضایعات (فوت)	تعداد قطعه ۹ فوتی	تعدادقطعه ۵ فوتی	تعدادقطعه ۳ فوتی
۱	۲	۰	۰	۵
۲	۰	۰	۱	۴
۳	۱	۰	۲	۲
۴	۲	۱	۰	۲
۵	۰	۱	۱	۱
۶	۲	۰	۳	۰

x_i را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$x_i =$ تعداد قطعات ۱۷ فوتی چوب که با طرح i برش داده شوند.

از آنجا که

$$۳۱۰ = ۹ \times ۱۵ + ۵ \times ۲۰ + ۳ \times ۲۵ = \text{فوت کل تقاضای مشتریان}$$
$$۱۷(x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ + x_۶) = \text{طول کل قطعات برش داده شده}$$

بنابراین

$$۱۷x_۱ + ۱۷x_۲ + ۱۷x_۳ + ۱۷x_۴ + ۱۷x_۵ + ۱۷x_۶ - ۳۱۰ = \text{ضایعات شرکت}$$

به این ترتیب، هدف شرکت عبارت است از :

$$\min z = ۱۷x_۱ + ۱۷x_۲ + ۱۷x_۳ + ۱۷x_۴ + ۱۷x_۵ + ۱۷x_۶ - ۳۱۰$$

که معادل است با کمینه ساختن

$$۱۷(x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ + x_۶)$$

و یا

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ + x_۶$$

بنابراین تابع هدف مسئله

$$\min z = x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ + x_۶$$

یعنی شرکت می تواند ضایعات را از طریق تعداد قطعات ۱۷ فوتی که برش می دهد کمینه سازد.
قیود این مسئله عبارتند از :
قید ۱ : حداقل ۲۵ قطعه ۳ فوتی لازم است .
قید ۲ : حداقل ۲۰ قطعه ۵ فوتی لازم است .
قید ۳ : حداقل ۱۵ قطعه ۹ فوتی لازم است .
از آنجا که تعداد قطعات ۳ فوتی برابر

$$۵x_۱ + ۴x_۲ + ۲x_۳ + ۲x_۴ + x_۵$$

است، پس قید یک عبارت است از :

$$۵x_۱ + ۴x_۲ + ۲x_۳ + ۲x_۴ + x_۵ \geq ۲۵$$

به طور مشابه قید (۲)

$$x_۲ + ۲x_۳ + x_۵ + ۳ + ۳x_۶ \geq ۲۰$$

و قید ۳ عبارت است از :

$$x_۴ + x_۵ \geq ۱۵$$

توجه کنید که ضریب x_i باید عددی صحیح فرض شود. علی رغم این حقیقت، در مسائل بزرگ مقیاس یک جواب نزدیک به بهینه را می توان از حل مسئله، به منزله یک مسئله LP و یا گرد کردن مقادیر کوچک به سمت بالا به دست آورد. البته این کار ممکن است به بهینه ترین پاسخ عدد صحیح مسئله منجر نشود، ولی معمولا یک

جواب نسبتا خوب ارائه می دهد. به این دلیل ما روی حالت LP مسئله تمرکز می کنیم. بنابراین، داریم :

$$\begin{aligned} &\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\ &s.t \quad 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 \geq 25 \\ &\qquad x_2 + 2x_3 + x_5 + 3x_6 \geq 20 \\ &\qquad x_4 + x_5 \geq 15 \\ &\qquad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in z^+ \end{aligned}$$

توجه کنید که x_1 فقط در قید اول وجود دارد(زیرا طرح یک فقط قطعه ۳ فوتی تولید می کند.) و به طور مشابه x_6 فقط در قید دوم وجود دارد. لذا می توان از x_1 و x_6 به عنوان متغیر پایه ای در قیود اول و دوم استفاده کرد. متاسفانه قید سوم فاقد یک متغیر پایه ای بدیهی است. برای اجتناب از افزودن متغیر مصنوعی، الگوی برش ۷ را تعریف می کنیم. این طرح فقط قطعه ۹ فوتی تولید می کند. هم چنین x_7 را به منزله تعداد برش با الگوی ۷ در نظر می گیریم. ستون نظیر x_7 در مسئله CSP عبارت است از :

$$LP \text{ ستون نظیر } x_7 \text{ در مسئله } = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

و یک جمله x_7 با ضریب یک به تابع هدف افزوده خواهد شد. اکنون $B = \{x_1, x_6, x_7\}$ اولین پایه مسئله LP ۳-۲۶ است. اگر جدول نظیر این پایه را جدول صفر بنامیم، داریم:

$$B_0 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad B_0^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_B B_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

اکنون اگر متغیرهای غیر پایه ای را قیمت گذاری کنیم، می توانیم متغیر وارد شونده را تعیین نماییم. در مسائل

بزرگ مقیاس که هزاران متغیر وجود دارد، قیمت گذاری همه متغیر های غیر پایه ای، کاری بس دشوار و خسته کننده است. در چنین وضعیتی، روش تولید ستون نقشی مهم و کلیدی بازی می کند. از انجا که یک مسئله کمینه سازی را حل می کنیم، پس به متغیری با قیمت مثبت (ضریب مثبت در سطر صفر جدول فعلی) نیاز داریم. در مسئله برش، هر ستون یا متغیر، بیانگر طرحی از برش است. یعنی یک متغیر با ۳ عدد $a_۳, a_۵$ و $a_۹$ مشخص می شود که a_i تعداد قطعات i فوتی است که از برش یک قطعه ۱۷ فوتی بر طبق طرح داده شده به دست می آید. برای مثال متغیر $x_۲$ با $a_۳ = ۴$ و $a_۵ = ۱$ مشخص می شود. ایده اصلی در روش تولید ستون آن است که به روشی موثر، ستونی را بیابیم که قیمتی مناسب (مثبت در مسئله کمینه سازی و منفی در مسئله بیشینه سازی برای ورود به پایه داشته باشد. با استفاده از رابطه ۲ $c_BB^{-۱}a_j - c_j$ برای پایه فعلی قیمت گذاری ترکیبی از $a_۳, a_۵$ و $a_۹$ عبارت است از :

$$c_BB_۰^{-۱}\begin{bmatrix}a_۳\\a_۵\\a_۹\end{bmatrix} - ۱ = \frac{۱}{۵}a_۳ + \frac{۱}{۳}a_۵ + a_۹ - ۱. \qquad (۳-۲)$$

توجه کنید که در رابطه (۲-۳) $a_۳, a_۵$ و $a_۹$ باید طوری انتخاب شوند که بیش از ۱۷ فوت چوب استفاده نکنند. در حالی که بیشترین قیمت را برای ورود به پایه ایجاد کنند. همچنین می دانیم که $a_۳, a_۵$ و $a_۹$ باید صحیح و نامنفی باشند. این حالت مشابه حالت کوله پشتی است که حجم کوله در آن برابر ۱۷ فوت و ارزش کالاهای موجود برابر $+\frac{۱}{۵}$ و $\frac{۱}{۳}$ و ۱ است.اکنون ترکیبی که دارای بهترین قیمت است از حل مسئله کوله پشتی زیر به دست می آوریم:

$$\begin{aligned}\max z &= \frac{۱}{۵}a_۳ + \frac{۱}{۳}a_۵ + a_۹ - ۱\\ s.t \quad & ۳a_۳ + ۵a_۵ + ۹a_۹ \leq ۱۷,\\ & a_۳, a_۵, a_۹ \in z^+\end{aligned} \qquad (۴-۲)$$

مساله (۲-۴) یک مسئله کوله پشتی بدون محدودیت صفر- یک روی متغیرها است که می توان با روش های مختلفی (مانند شاخه و برش، الگوریتم ژنتیک) آن را حل نمود.

جواب بهینه مساله (۲-۴) عبارت است از : $a_۹ = ۱$ ، $a_۵, a_۳$ و $z = \frac{۸}{۱۵}$ لذا قیمت $x_۵ = \frac{۸}{۱۵}$ و $x_۵$ وارد پایه

می شود که برای این منظور بایستی سمت راست جدول فعلی و ستون نظیر x_5 را محاسبه کنیم.

$$\text{ستون } x_5 \text{ در جدول فعلی} = B_0^{-1}a_5 = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{سمت راست جدول فعلی} = B_0^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 20 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ \frac{20}{3} \\ 15 \end{bmatrix}$$

آزمون نسبت نشان می دهد که x_5 متغیر پایه ای سطر سوم است. پس $B(1) = \{x_1, x_6, x_5\}$ با استفاده از شکل ضربی وارون داریم :

$$B_1^{-1} = E_0 B_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_B B_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & \frac{7}{15} \end{bmatrix}$$

با قیمت های سایه ای جدید $(c_B B_1^{-1})$ می توان با روش تولید ستون مشخص نمود که آیا ترکیبی برای ورود به پایه وجود دارد یا خیر. برای قیمت های سایه فعلی، قیمت ترکیبی از a_3, a_5 و a_9 عبارت است از :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & \frac{7}{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_5 \\ a_9 \end{bmatrix} - 1 = \frac{1}{5}a_3 + \frac{1}{3}a_5 + \frac{7}{15}a_9 - 1$$

بنابراین برای جدول فعلی روش تولید ستون به مسئله زیر منتهی می شود :

$$\max z = \frac{۱}{۵}a_۳ + \frac{۱}{۳}a_۵ + \frac{۷}{۱۵}a_۹ - ۱$$
$$s.t \quad ۳a_۳ + ۵a_۵ + ۹a_۹ \leq ۱۷$$
$$a_۳, a_۵, a_۹ \geq ۰; a_۳, a_۵, a_۹, integer \qquad (۵-۲)$$

با حل مسئله کوله پشتی (۲-۵) با روش برنامه پویا داریم : $a_۳ = ۴$ و $a_۹ = ۰, a_۵ = ۱$ بنابراین $x_۲$ وارد پایه می شود.

$$\begin{bmatrix} ۲ \\ \frac{۵}{۳} \\ ۱۵ \end{bmatrix} \text{سمت راست جدول فعلی} \qquad \begin{bmatrix} \frac{۴}{۵} \\ \frac{۱}{۳} \\ ۰ \end{bmatrix} = \text{ستون نظیر } x_۲ \text{ در جدول فعلی}$$

آزمون نسبت نشان می دهد که $x_۲$ متغیر پایه ای سطر یک خواهد بود. بنابراین $B(۲) = \{x_۲, x_۶, x_۵\}$ با استفاده از شکل ضربی وارون داریم :

$$E_۱ = \begin{bmatrix} \frac{۵}{۴} & ۰ & ۰ \\ -\frac{۵}{۱۲} & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$B_۲^{-۱} = E_۱B_۱^۱ = \begin{bmatrix} \frac{۵}{۲} & ۰ & ۰ \\ -\frac{۵}{۱۲} & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{۱}{۵} & ۰ & -\frac{۱}{۵} \\ ۰ & \frac{۱}{۳} & -\frac{۱}{۳} \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۴} & ۰ & -\frac{۱}{۴} \\ -\frac{۱}{۱۲} & \frac{۱}{۳} & -\frac{۱}{۴} \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

مقادیر جدید قیمت سایه ای عبارتند از :

$$c_BB_۲^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{۱}{۴} & ۰ & -\frac{۱}{۴} \\ -\frac{۱}{۱۲} & \frac{۱}{۳} & -\frac{۱}{۴} \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۶} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$$

با توجه به قیمت سایه ای جدید مسئله تولید ستون به صورت زیر تعریف می شود :

$$\begin{aligned} &\max z = \frac{۱}{۶}a_۳ + \frac{۱}{۳}a_۵ + \frac{۱}{۲}a_۹ - ۱ \\ &s.t \quad ۳a_۳ + ۵a_۵ + ۹a_۹ \leq ۱۷ \\ &\qquad a_۳, a_۵, a_۹ \geq ۰; a_۳, a_۵, a_۹, \text{ عدد صحیح} \end{aligned} \tag{۲-۶}$$

با حل مسئله کوله پشتی (۲-۶) داریم : $a_۹ = ۰,\ a_۵ = ۱,\ a_۳ = ۴$ بنابراین $z = ۰$ می شود. بنابراین هیچ متغیری نمی تواند وارد پایه شود. این به آن معناست که جواب پایه فعلی بهینه مسئله است. برای تعیین مقدار متغیر های پایه ای سمت راست جدول فعلی را محاسبه می کنیم :

$$\text{سمت راست جدول فعلی} = B_۲^{-۱}b = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۴} & ۰ & -\frac{۱}{۴} \\ -\frac{۱}{۱۲} & \frac{۱}{۳} & -\frac{۱}{۴} \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲۵ \\ ۲۰ \\ ۱۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{۵}{۲} \\ \frac{۵}{۶} \\ ۱۵ \end{bmatrix}$$

بنابراین جواب بهینه مسئله عبارت است از $x_۵ = ۱۵,\ x_۶ = \frac{۵}{۶},\ x_۲ = \frac{۵}{۲}$ که می توانیم با گرد کردن به یک جواب صحیح به صورت $x_۵ = ۱۵,\ x_۶ = ۱,\ x_۲ = ۳$ برسیم. در روش تولید ستون تنها با داشتن یک جواب پایه ای شدنی و بدون لیست کردن فهرستی از سایر پاسخ های شدنی می توانیم به جواب بهینه برسیم چرا که در هر تکرار یک ترکیب خوب که پاسخ z را بهبود ببخشد با حل یک مسئله IP به دست می آید.

فصل ۳

روش های حل مساله برش دو مرحله‌ای

۳-۱ مقدمه

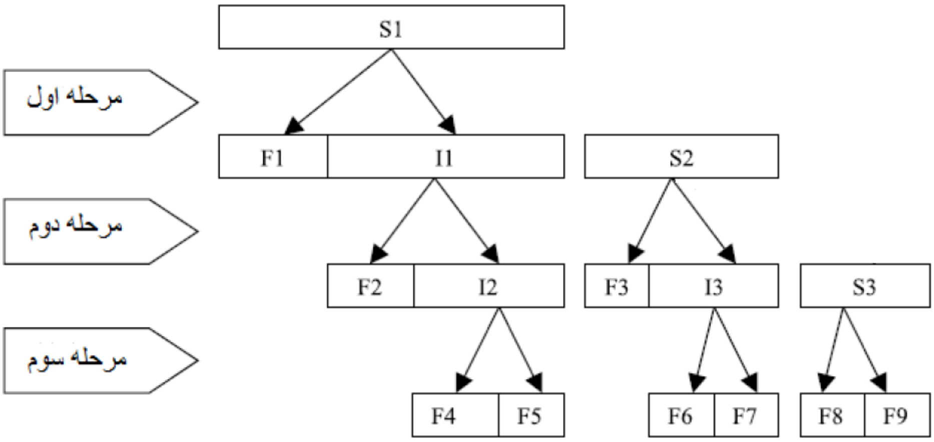
هنگامی که فرآیند برش، در چندین مرحله پیاپی توزیع می شود، در واقع یک تعمیم از مساله برش مواد اولیه [1] (CSP) یک بعدی داریم. CSP چند مرحله ای نه تنها شامل الگوهای برش و عملیات مربوط به آن، بلکه شامل محصولات واسطه و مقادیر تولید و مصرف شده در هر مرحله از فرایند برش می شود. این محصولات واسطه ای برای تولید سایزهای واسطه کوچکتر یا سایزهای نهایی برش داده می شوند. محصولات واسطه در طی روند برش هم ورودی و هم خروجی هستند. این دست از مسائل در صنایع بسیاری مانند کاغذ، فیلم، چرم، فولاد و ... رخ می دهند.

با اینکه نتایج این پژوهش برای هر صنعتی که برش چند مرحله ای در آن صورت گرفته مناسب است، در اینجا از واژه " رول " که از اصطلاحات پذیرفته شده در صنعت کاغذ است، استفاده می کنیم.در واقع قطر رول، طول کاغذ باز شده است.

شکل (۳-۱) یک نمونه از فرآیند برش سه مرحله ای را نشان می دهد. دراین مثال، سه نوع از رول های اولیه $S_۱$ ، $S_۲$ و $S_۳$ برای تولید ۹ نوع از رول های پایانی $(F_۱ - F_۹)$ مورد استفاده قرار می گیرد. رول های میانی (محصولات واسطه) $I_۱$ ، $I_۲$ و $I_۳$ در دو مرحله اول برش داده می شوند. واضح است که در دنیای واقعی، گسترشی از انواع مواد اولیه، محصولات واسطه و حتی مراحل برش را مشاهده می‌کنیم. گیلمور و گوموری [۲۲] برای حل یک CSP دو بعدی (مستطیل شکل) ، ابتدا با برش مواد اولیه در طول و سپس برش هریک از نوارها در عرض مورد نظر، آن را به یک CSP دو مرحله ای تبدیل کردند.

برای حل یک مساله برنامه ریزی خطی (LP) در مقیاس بزرگ، تکنیک تولید ستون با یک کوله پشتی منظم به

[1] Cutting stock problrm

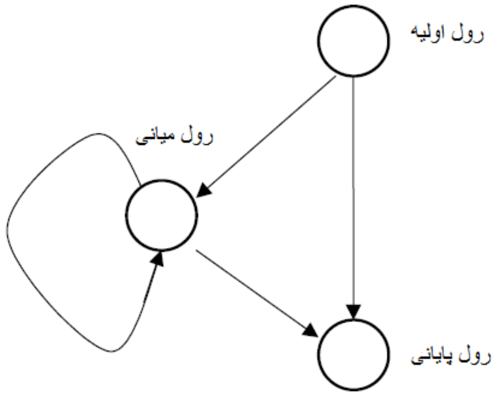


شکل ۳-۱: نمونه‌ای از مساله برش سه مرحله‌ای

عنوان مساله کمکی مشهور است. این تکنیک در مسائل برش نیز بسیار کاربرد دارد.
در این فصل با تعمیم تکنیک تولید ستون پیشنهادی توسط گیلمور و گوموری[۲۰]برای حل CSP تک مرحله ای، تکنیک تولید سطر و ستون را برای حل CSP دو مرحله ای یک بعدی مطرح می کنیم [۲۳]. ماتریس LP هم در ردیف و در ستون ، گسترش می یابد و با تعداد متناهی از تکرار الگوریتم سیمپلکس اصلاح شده به یک جواب بهینه یا نزدیک بهینه منجر می شود.

۳-۲ مدل با لیست رول های میانی اجباری (داده شده)

در این دسته از مسائل برش، سه لیست از اندازه رول ها وجود دارد:
- لیست اندازه های ماده اولیه
- لیست اندازه های میانی
- لیست اندازه های پایانی



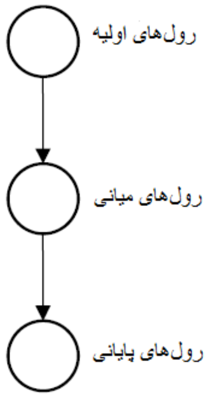
شکل ۳-۲: ارتباط بین رول‌های اولیه، میانی و پایانی

شکل (۳-۲) ارتباط بین این سه نوع رول را نشان می دهد. برای اندازه های مواد اولیه، مقادیر موجود معلوم هستند. رول های ماده اولیه می توانند به طور بالقوه در هر مرحله از فرایند برش مصرف شوندو به رول میانی یا پایانی تبدیل شوند. رول های میانی می توانند ورودی یا خروجی باشند. قیمت تکنولوژیکی برای رول های میانی به صورت اکید هستند، زیرا برای هر سایز میانی تعداد کل رول مصرف شده نمی تواند بیش تر از مقدار تولید شده باشد و در حالت ایده آل باید تعادل کامل داشته باشد، در غیر اینصورت باید رول های میانی غیر قابل قبول تولید شده به عنوان ضایعات مورد توجه قرار بگیرند. برای هر رول نهایی یک مقدار سفارش داده شده داریم که باید برآورده شود.

در این پایان نامه یک CSP دو مرحله ای را بررسی می کنیم که فقط یک عرض از رول اولیه وجود دارد و در مرحله اول به چندین رول میانی بریده می شود و در مرحله دوم، رول های پایانی از برش رول های میانی تولید می شوند.

فرض کنیم عرض هر رول میانی که از مرحله اول خارج شده و به مرحله دوم می رود، محدودیت های حداقل – حداکثر را رعایت می کند. همچنین عرض هر رول میانی نیز باید دارای حداقل لبه [۱] (e^{min}) باشد تا در مرحله دوم پیراسته شود. شکل (۳-۳) ارتباط بین رول ها را در مساله مورد بررسی نشان می دهد.

[۱] minimum edge



شکل ۳-۳: نحوه ارتباط بین رول ها در مساله مورد بررسی

فرض کنید y و w به ترتیب بردارهایی از عرض رول های میانی و پایانی و w_0 عرض رول اولیه باشد. الگوهای برش متناظر با هریک از عرض ها را می توانیم با یک ستون نمایش دهیم. الگوهای برش مربوط به هریک از عرض های میانی و پایانی را در ماتریس A_{11} و A_{22} قرار می دهیم. به عبارت دیگر متناظر با هر یک از عرض های میانی و پایانی، یک الگو برای برش و تولید آنها در نظر گرفته و در ماتریس A_{11} و A_{22} قرار می دهیم.
ماتریس اتصال A_{12} ، ارتباط بین هر یک از الگوهای برش مرحله اول را با الگوهای مرحله دوم نشان می دهد. در واقع هر ستون j از ماتریس اتصال A_{12} یک بردار به صورت $(0, ..., 0, -1, 0..., 0)^T$ است که دقیقا مولفه غیر صفر (-1) در موقعیت i ام در تناظر با رول میانی i ام ظاهر می شودکه باید طبق الگوی برش تعریف شده توسط ستون j ماتریس A_{22} ، بریده شود.
فرض کنیم k تعداد سایزهای میانی موجود و m تعداد سایزهای پایانی باشد. در این صورت A_{11} یک ماتریس مربعی $k \times k$ ، ماتریس A_{22} از مرتبه $m \times m$ و A_{12} یک ماتریس مستطیلی از مرتبه $k \times m$ خواهد بود.
همانطور که بیان شد هریک از ستون های A_{11} و A_{22} بیانگر یک الگوی برش در مرحله اول و دوم است. اگر تعداد دفعاتی که هریک از الگوهای فعال مرحله اول مورد استفاده قرار می گیرد را با بردار x_1 و تعداد دفعاتی که هر یک از الگوهای فعال مرحله دوم استفاده می شود را با بردار x_2 نمایش دهیم، می توانیم برای این CSP دو مرحله ای یک مدل LP بنویسیم. در مساله برش، هدف مینیمم کردن مواد اولیه مورد استفاده است که در اینجا

معادل است با مینیمم کردن تعداد دفعات استفاده شده از الگوهای برش مرحله اول یعنی $min\ x_۱$.

$$min \quad \begin{pmatrix} ۱^T & ۰^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{pmatrix} \tag{۳-۱}$$

$$s.t. \quad \begin{pmatrix} A_{۱۱} & A_{۱۲} \\ ۰ & A_{۲۲} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} ۰ \\ b \end{pmatrix}, \tag{۳-۲}$$

$$x_۱, x_۲ \geq ۰, \tag{۳-۳}$$

که در آن b بردار تقاضای مشتری از رول های پایانی است.
اگر داشته باشیم : $y = [y_۱y_۲...y_k]$ و $w = [w_۱w_۲...w_m]$ در این صورت بردارهای $x_۱$ ، $x_۲$ و b به فرم زیر خواهد بود:

$$x_۱ = [x_{۱۱}x_{۱۲}...x_{۱k}]^T, \qquad x_۲ = [x_{۲۱}x_{۲۲}...x_{۲m}]^T, \qquad b = [b_۱b_۲...b_m]^T.$$

توجه داشته باشید که ماتریس کامل LP در (۳-۲) ساختار خاصی دارد. در شروع الگوریتم سیمپلکس اصلاح شده $A_{۱۱}$ و $A_{۲۲}$ دو بلوک قطری هستند که نشان دهنده الگوهای برش در دو مرحله CSP هستند، بلوک اتصال $A_{۱۲}$ و بلوک صفر در گوشه پایین سمت چپ، که یک ماتریس صفر از مرتبه $m \times k$ است. بردار سمت راست از بردار صفر و بردار b ساخته شده است. درایه قطری iام در ماتریس قطری $A_{۱۱}$ با استفاده از $\lfloor \frac{w_۰}{y_i} \rfloor$ و درایه قطری jام در ماتریس $A_{۲۲}$ با استفاده از $\lfloor \frac{y_i}{w_j} \rfloor$ تعیین می شوند، که y_i سایز میانی است که می خواهیم سایز پایانی w_j را از آن برش بزنیم. برای این الگو عدد -۱ در ماتریس $A_{۱۲}$ در درایه ij ام ظاهر می‌شود.
لازم به ذکر است در مساله LP قیود (۳-۲) تضمین می‌کند که
- مصرف رول‌های $A_{۱۲}x_۲$ در مرحله دوم بیشتر از تولید $A_{۱۱}x_۱$ در مرحله اول نباشد ($A_{۱۱}x_۱ \geqslant A_{۱۲}x_۲$)،
- تقاضای مشتری از رول‌های نهایی برآورده شود ($A_{۲۲}x_۲ \geqslant b$).
اگر مساله کوچک باشد، شاید بتوانیم همه الگوهای برش را در ماتریس‌ها نشان دهیم و با سیمپلکس اصلاح شده مساله را حل کنیم. اگر نتوانیم همه الگوهای ممکن را از پیش تولید کنیم ، می توانیم از تکنیک تولید ستون برای انتخاب ستون ورودی به پایه سیمپلکس استفاده کنیم . در واقع در هر تکرار از سیمپلکس اصلاح شده یک الگوی جدید تولید می‌کنیم.
برای درک بهتر مطلب بیان شده، مثال زیر را بررسی می‌کنیم.

مثال ۳-۲-۱. فرض کنید ماده اولیه موجود رول‌هایی با سایز $۵۰۰۰mm$ ، باشد و بخواهیم ۷۲ رول $۳۲۰mm$ ، ۱۰۴رول $۴۵۰mm$ و ۱۵۰ رول $۵۰۰mm$ تولید کنیم و برای این منظور از رول‌های میانی $۱۲۰۰mm$ و $۱۹۰۰mm$

استفاده گردد.

در این مثال برای ساخت مدل LP مساله از ماتریس‌های زیر استفاده می‌کنیم.

$$y = [۱۲۰۰, ۱۹۰۰]^T, \qquad w = [۳۲۰, ۴۵۰, ۵۰۰]^T, \qquad b = [۷۲, ۱۰۴, ۱۵۰]^T,$$

$$A_{۱۱} = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}, \qquad A_{۱۲} = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}, \qquad A_{۲۲} = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}.$$

این ماتریس‌ها بیان می‌کنند که الگوهای فعال به صورت زیر هستند:

در مرحله اول : از هر رول $۵۰۰۰mm$ ، ۴ رول $۱۲۰۰mm$ $(x_{۱۱})$ و از هر رول اولیه ۲ رول میانی $۱۹۰۰mm$ $(x_{۱۲})$ برش می دهیم.

در مرحله دوم: از هر رول میانی $۱۲۰۰mm$ ، ۳ رول پایانی $۳۲۰mm$ $(x_{۲۱})$ را برش می‌زنیم. بنابراین برای تولید ۷۲ رول $۳۲۰mm$ به ۲۴ رول $۱۲۰۰mm$ نیاز داریم. از هر رول میانی $۱۹۰۰mm$ ، ۴ رول پایانی $۴۵۰mm$ $(x_{۲۲})$ و از رول‌های $۱۲۰۰mm$ ، ۲ رول $۵۰۰mm$ $(x_{۲۳})$ تولید می‌شود. لذا برای تامین تقاضای مورد نظر به ۲۶ رول $۱۹۰۰mm$ و ۷۵ رول $۱۲۰۰mm$ دیگر نیز نیاز داریم. مدل LP به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\begin{aligned} &min \quad x_{۱۱} + x_{۱۲} \\ &s.t. \quad \begin{pmatrix} ۴ & ۰ & -۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۲ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۲ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{۱۱} \\ x_{۱۲} \\ x_{۲۱} \\ x_{۲۲} \\ x_{۲۳} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۷۲ \\ ۱۰۴ \\ ۱۵۰ \end{pmatrix}, \\ &\qquad x_{۱۱}, x_{۱۲}, x_{۲۱}, x_{۲۲}, x_{۲۳} \geq ۰, \end{aligned} \tag{۴-۳}$$

واضح است که این الگوها یک جواب شدنی برای شروع سیمپلکس اصلاح شده را فراهم می‌کنند و لزوما جواب بهینه نیستند. با حل این مساله داریم:

$$[x_{۱۱} \; x_{۱۲} \; x_{۲۱} \; x_{۲۲} \; x_{۲۳}] = [۲۴/۷۵ \; ۱۳ \; ۲۴ \; ۲۶ \; ۷۵]$$

و مقدار تابع هدف ۳۷٫۷۵ $= x_{۱۱} + x_{۱۲}$ است و گویای آن است که برای تامین تقاضا به ۳۷٫۷۵ رول اولیه ۵۰۰۰mm نیاز داریم که از آن باید $\begin{pmatrix} ۹۹ \\ ۲۶ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۲۴٫۷۵ \\ ۱۳ \end{pmatrix}$ ۹۹ رول ۱۲۰۰mm و ۲۶ رول ۱۹۰۰mm تولید شود.

۳-۲-۱ مساله دوگان

در سیمپلکس اصلاح شده در هر تکرار برای تعیین وجود متغیر غیر پایه که قابلیت ورود به پایه را داشته باشد، با استفاده از رابطه $c_B B^{-۱} a_j - c_j$ ضرایب را در سطر هدف بدست می‌آوریم و ستون متناظر با مثبت ترین ضریب (در مساله min) را وارد می‌کنیم. از آنجا که $c_B B^{-۱}$ در واقع مقادیر متغیرهای دوگان مساله اصلی هستند برای تعیین انتخاب ستون ورودی می‌توانیم با استفاده از مقادیر دوگان سطر هدف را ارزش‌گذاری کنیم. در واقع مثبت‌ترین ضریب در سطر هدف متناظر است با ماکسیمم مقادیر دوگان.

با توجه به اینکه در CSP مورد بررسی الگوهای برش از پیش تعیین نشده‌اند، لذا مشابه تکنیک تولید ستون که در فصل ۲ معرفی شد، از مساله دوگان استفاده می‌کنیم. برای تعیین مقادیر دوگان کافی است در هر تکرار دوگان مساله اصلی را نوشته و آن را حل کنیم. در مساله CSP اصلی هر یک از قیود بیانگر محدودیت در رول‌های میانی و پایانی است، بنابراین در مساله دوگان هر یک از متغیرها متناظر با رول‌های میانی و پایانی خواهند بود. مساله دوگان متناظر با (۳-۱)-(۳-۳) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$max \quad \begin{pmatrix} ۰^T & b^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_۱ \\ u_۲ \end{pmatrix} \tag{۳-۵}$$

$$s.t. \quad \begin{pmatrix} A_{۱۱}^T & ۰ \\ A_{۱۲}^T & A_{۲۲}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_۱ \\ u_۲ \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}, \tag{۳-۶}$$

$$u_۱, u_۲ \geq ۰, \tag{۳-۷}$$

که در آن $u_۱$ و $u_۲$ به ترتیب متغیرهای دوگان متناظر با سایزهای میانی و پایانی است.

$$u_۱ = [u_{۱۱} \ u_{۱۲} \dots u_{۱k}]^T, \qquad u_۲ = [u_{۲۱} \ u_{۲۲} \dots u_{۲m}]^T,$$

u_{1i} : متغیر دوگان متناظر با سایز میانی iام

u_{2j} : متغیر دوگان متناظر با سایز پایانی jام

مثال ۳-۲-۲. مساله دوگان متناظر با مثال(۳-۲-۱) را بررسی می‌کنیم. با توجه به مدل LP (۳-۴) مساله دوگان به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} &max \quad 72u_{21} + 104u_{22} + 150u_{23} \\ &s.t. \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{21} \\ u_{22} \\ u_{23} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ &\qquad u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}, u_{23} \geq 0, \end{aligned} \tag{۳-۸}$$

با حل (۳-۸) داریم:

$$\begin{aligned} &4u_{11} \leqslant 1 \Longrightarrow u_{11} = \frac{1}{4}, \\ &2u_{12} \leqslant 1 \Longrightarrow u_{12} = \frac{1}{2}, \\ &-u_{11} + 3u_{21} \leqslant 0 \Longrightarrow 3u_{21} = \frac{1}{4} \Longrightarrow u_{21} = \frac{1}{12}, \\ &-u_{21} + 4u_{22} \leqslant 0 \Longrightarrow u_{22} = \frac{1}{8}, \\ &-u_{11} + 2u_{23} \leqslant 0 \Longrightarrow u_{23} = \frac{1}{8}, \\ &\qquad u_1 = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]^T, \qquad u_2 = [\frac{1}{12}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}]^T. \end{aligned}$$

گام انتخاب ستون در الگوریتم سیمپلکس اصلاح شده با استفاده از مساله دوگان (۳-۵)-(۳-۶) منجر به حل دو مساله کمکی دیگر می‌شود که در زیربخش بعدی توضیح خواهیم داد.

۳-۲-۲ تولید ستون

مساله کمکی اول تولید الگوی برش مربوط به مرحله اول فرآیند برش است. لیست رول‌های میانی از قبل معلوم است و بدون تغییر باقی می‌ماند. این مساله به گروه اول از قیود (۳-۶) از مساله دوگان وابسته است.
می‌خواهیم هر رول ماده اولیه (w_0) را بر اساس ترکیبی خطی از سایزهای میانی (y^Ta) برش دهیم. هدف این است که این ترکیب به گونه ای باشد که بیشترین ارزش را برای ورود به پایه داشته باشد. بنابراین مساله کمکی مورد نظر به صورت زیر است:

$$\text{(کوله پشتی ۱)} : \quad max \quad u_1^T a$$
$$s.t. \quad y^T a \leqslant w_0, \qquad (۹-۳)$$
$$a \in Z^+,$$

که در آن $a = [a_1\ a_2\ ...\ a_k]$ برداری است که این ترکیب را نشان می‌دهد.

در واقع می‌خواهیم یک الگوی برش بهینه در مرحله اول از CSP پیدا کنیم. مساله کمکی (۳-۹)، یک مساله کوله پشتی بدون محدودیت است. مشابه مساله کوله پشتی که در CSP تک مرحله‌ای داریم.
این مساله کوله پشتی را می‌توان با روش‌های مختلفی مانند روش حریصانه، شاخه و کران و الگوریتم ژنتیک حل نمود. جواب این مساله الگوی بهینه برای برش رول‌های میانی از هر رول اولیه را نشان می‌دهد که آن را با بردار a نمایش می‌دهد.
با توجه به گروه اول از قیود (۳-۶) که به صورت $u_1^T A_{11} \leqslant 1^T$ نشان داده می‌شود. (A_{11} شامل الگوهای برش وابسته به عرض‌های میانی در مرحله اول است) نتیجه می‌شود که اگر برای بردار بهینه a ، مقدار تابع هدف $(u_1^T a)$ کمتر یا مساوی با ۱ باشد، یعنی ماتریس A_{11} فعلی بهینه است در غیر این صورت یعنی اگر مقدار تابع هدف بیش از ۱ باشد، ستون جدید a در مرحله اول از CSP تولید شده و بردار a به عنوان یک ستون وارد ماتریس A_{11} می‌گردد.

مثال ۳-۲-۳. مساله کوله پشتی ۱ را در مثال (۳-۲-۱) بررسی می‌کنیم.
با توجه به مثال (۳-۲-۲) که مقادیر متغیرهای دوگان میانی محاسبه شده‌اند، مساله کوله پشتی ۱ به صورت زیر

است:

$$\begin{cases} max \quad \frac{۱}{۴}a_۱ + \frac{۱}{۲}a_۲ \\ s.t. \quad ۱۲۰۰a_۱ + ۱۹۰۰a_۲ \leqslant ۵۰۰۰, \\ \qquad a_۱, a_۲ \in Z^+. \end{cases}$$

با حل این کوله پشتی با استفاده از روش حریصانه، جواب بهینه $a = [۱ \;\; ۲]^T$ به دست می‌آید. این الگوی برش جدید بیان می‌دارد که بهتر است از هر رول اولیه $۵۰۰۰mm$، ۲ رول میانی $۱۹۰۰mm$ و یک رول میانی $۱۲۰۰mm$ برش داده شود.

مقدار تابع هدف $۱/۲۵ = (۲)\frac{۱}{۲} + (۱)\frac{۱}{۴}$ است. بنابراین ستون $a_{۱۱} = [۱ \;\; ۲]^T$ وارد ماتریس $A_{۱۱}$ شده و جایگزین ستون دوم می‌شود. لذا ماتریس به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$A_{۱۱} = \begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}.$$

مساله کمکی دوم متناظر با الگوی برش برای رول‌های پایانی با استفاده از رول‌های میانی موجود است. این مساله مرتبط با گروه دوم از قیود (۳-۶) است.

هر رول میانی y_j براساس ترکیبی از رول‌های پایانی برش داده می‌شود. واضح است که این ترکیب نمی‌تواند بیش‌تر از مقدار $y_j - e^{min}$ باشد. این ترکیب باید به گونه‌ای باشد که بیشترین ارزش را برای ورود به پایه داشته باشد. بنابراین مساله کمکی متناظر با فرم زیر بیان می‌شود :

$$\begin{aligned} \text{(کوله پشتی ۲)} : \quad & max \quad u_۲^T a \\ & s.t. \quad w^T a \leqslant y_j - e^{min}, \\ & \qquad a \in Z^+, \end{aligned} \qquad (۳\text{-}۱۰)$$

که در آن a یک ستون mتایی است. $e^{min} \geqslant ۰$ حداقل لبه‌ی اجباری است که در مساله اصلی داده می‌شود. w بردار سایزهای پایانی، y_j عرض رول میانی jام و $u_۲$ بردار ضرایب تابع هدف که مقادیر متغیرهای دوگان متناظر با رول‌های پایانی است.

مساله (۳-۱۰) نیز یک مساله کوله پشتی است. لازم به ذکر است که به ازای هر یک از رول‌های میانی باید مساله

کوله پشتی ۲ بررسی شود. از آنجا که k رول میانی موجود داریم، بنابراین k مساله به فرم (۳-۱۰) خواهیم داشت. جواب هر یک از این مسائل الگوی بهینه برای برش رول‌های پایانی از رول میانی y_j را نشان می‌دهد.
در گروه دوم از قیود (۳-۶) داریم: $u_2^T A_{22} \leqslant -u_1^T A_{12}$. با توجه به ساختار ماتریس A_{12} ،که هر ستون فقط شامل یک مولفه غیر صفر -1 است که در سطر jام متناظر با رول میانی y_j ظاهر می‌شود، از ضرب $-u_1^T$ در هر یک از ستون‌های ماتریس A_{12} مقدار u_{1j} به دست می آید. یعنی $-u_1^T A_{12}$ برداری از مقادیر متغیرهای دوگان میانی است.
به عنوان نمونه در مثال‌های (۳-۲-۱) و (۳-۲-۲) داریم:

$$u_1^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad A_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \implies -u_1^T A_{12} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

بنابراین اگر برای جواب بهینه a مقدار تابع هدف کوله پشتی۲ $(u_2^T a)$ بیش از u_{1j} باشد، بردار a به عنوان یک ستون وارد ماتریس A_{22} می‌شود.

مثال ۳-۲-۴. مسائل کوله پشتی ۲ را در مثال (۳-۲-۱) بررسی می‌کنیم.
در اینجا ۲ سایز میانی وجود دارد، بنابراین دو مساله کوله پشتی ۲ خواهیم داشت.
فرض کنیم داشته باشیم $e^{min} = 50$ و با توجه به مقادیر متغیرهای دوگان محاسبه شده در مثال (۳-۲-۲) برای $j = 1$ داریم:

$$\begin{cases} max \quad \frac{1}{12}a_1 + \frac{1}{8}a_2 + \frac{1}{8}a_3 \\ s.t. \quad 320a_1 + 450a_2 + 500a_3 \leqslant 1200 - 50 = 1150, \\ \qquad a_1, a_2, a_3 \in Z^+. \end{cases}$$

با حل این مساله کوله پشتی داریم:
$a_1 = 2$ و $a_2 = 0$ و $a_3 = 1$ و مقدار تابع هدف $\frac{7}{24} = \frac{1}{8}(1) + \frac{1}{12}(2)$ است.
$\frac{1}{4} = u_{11} < \frac{7}{24}$ بنابراین ستون جدید $[1 \; 0 \; 2]^T$ وارد ماتریس A_{22} می‌شود. این الگوی برش بهینه بیان می‌کند که برای داشتن حداقل ضایعات بهتر است از هر رول میانی $1200mm$، ۲ رول پایانی $320mm$ و یک رول $500mm$ بریده می‌شود.
برای انتخاب ستون خروجی از وارون ماتریس پایه فعلی که در اینجا همان A_{22} است، استفاده کرده و $A_{22}^{-1}a$ و

$A_{۲۲}^{-۱}b$ را محاسبه می‌کنیم و سپس با استفاده از آزمون نسبت ستون خروجی را تعیین می‌کنیم.

$$A_{۲۲}^{-۱}a = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} & ۰ & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۴} & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۲}{۳} \\ ۰ \\ \frac{۱}{۲} \end{bmatrix},$$

$$A_{۲۲}^{-۱}b = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} & ۰ & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۴} & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۷۲ \\ ۱۰۴ \\ ۱۵۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲۴ \\ ۲۶ \\ ۷۵ \end{bmatrix},$$

آزمون نسبت: $$min\,\{\frac{۲۴}{\frac{۲}{۳}}, \frac{۷۵}{\frac{۱}{۲}}\} = min\,\{۳۶, ۱۵۰\} = ۳۶$$

بنابراین ستون اول باید از پایه $A_{۲۲}$ خارج شده و ستون جدید جایگزین آن شود. لذا ماتریس به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$A_{۲۲} = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}.$$

به طور مشابه، برای $j = ۲$ ، $y_۲ = ۱۹۰۰$ ، لذا مساله کمکی متناظر فرم زیر است:

$$\begin{cases} max \quad \frac{۱}{۱۲}a_۱ + \frac{۱}{۸}a_۲ + \frac{۱}{۸}a_۳ \\ s.t. \quad ۳۲۰a_۱ + ۴۵۰a_۲ + ۵۰۰a_۳ \leqslant ۱۹۰۰ - ۵۰ = ۱۸۵۰, \\ \qquad a_۱, a_۲, a_۳ \in Z^+. \end{cases}$$

با حل این کوله پشتی یک جواب بهینه به صورت $a_۱ = ۰$ و $a_۲ = ۳$ و $a_۳ = ۱$ و مقدار تابع هدف $\frac{۱}{۸}(۳) + \frac{۱}{۸}(۱) = \frac{۱}{۲}$ است. از آنجا که $u_{۱۲} = \frac{۱}{۲}$ است، بنابراین لازم نیست این ستون وارد ماتریس $A_{۲۲}$ شود.

دلیل این امر آن است که در ماتریس $A_{۲۲}$ فعلی الگوی برش $[۰ \ ۴ \ ۰]^T$ رابرای رول میانی $y_۲ = ۱۹۰۰$ داریم. به ازای این الگو نیز مقدار تابع هدف $\frac{۱}{۸}(۴) = \frac{۱}{۲}$ است. یعنی ستون $[۰ \ ۴ \ ۰]^T$ نیز یک جواب بهینه دیگر برای مساله کوله پشتی فوق است.

اگر در مساله اصلی (۳-۱)-(۳-۳) ، همه رول‌های میانی معلوم باشند و رول میانی نامطمئن نداشته باشیم.

تولید ستون با استفاده از دو کوله پشتی ۱و ۲ برای حل مساله بهینه کافی است.

مثال ۳-۲-۵. در مثال‌های پیشین یک تکرار از سیمپلکس برای مساله (۳-۱)-(۳-۳) انجام شد. پس از این تکرار مساله ماتریس LP جدید $= \begin{pmatrix} A_{۱۱} & A_{۱۲} \\ ۰ & A_{۲۲} \end{pmatrix}$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & min \quad x_{۱۱} + x_{۱۲} \\ & s.t. \quad \begin{pmatrix} ۴ & ۱ & -۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۲ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۲ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{۱۱} \\ x_{۱۲} \\ x_{۲۱} \\ x_{۲۲} \\ x_{۲۳} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۷۲ \\ ۱۰۴ \\ ۱۰۵ \end{pmatrix}, \\ & x_{۱۱}, x_{۱۲}, x_{۲۱}, x_{۲۲}, x_{۲۳} \geq ۰, \end{aligned} \qquad (۱۱-۳)$$

که با حل آن داریم: $[x_{۱۱} \ x_{۱۲} \ x_{۲۱} \ x_{۲۲} \ x_{۲۳}] = [۲۰ \ ۱۳ \ ۳۶ \ ۲۶ \ ۵۷]$

و مقدار تابع هدف برابر است با : $x_{۱۱} + x_{۱۲} = ۲۰ + ۱۳ = ۳۳$ و معلوم می‌شودکه تابع هدف نسبت به قبل بسیار کاهش یافته است. با این الگوها برای تامین تقاضای رول‌های پایانی به $\begin{pmatrix} ۹۳ \\ ۲۶ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۴ & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۲۰ \\ ۱۳ \end{pmatrix}$ نیاز داریم، یعنی $۵۷ + ۳۶ = ۹۳$ رول $۱۲۰۰mm$ و ۲۶ رول $۱۹۰۰mm$ احتیاج داریم که باید آنها را از ۳۳ رول اولیه $۵۰۰۰mm$ برش بزنیم و برای این کار ۲۰ بار از الگوی $\begin{pmatrix} ۴ \\ ۰ \end{pmatrix}$ و ۱۳ بار از الگوی $\begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \end{pmatrix}$ استفاده می‌کنیم.

جهت بررسی بهینه بودن جواب به دست آمده لازم است گام‌های بیان شده را دوباره انجام دهیم:

- دوگان مساله (۳-۱۱) را نوشته و مقادیر متغیرهای دوگان را به دست آوردیم.
- مساله کوله پشتی ۱ را حل می‌کنیم و اگر مقدار بهینه بیش از یک بود ستون جدید را به ماتریس $A_{۱۱}$ اضافه می‌کنیم.
- مساله کوله پشتی ۲ را حل کرده و اگر مقدار بهینه بیش از $u_{۱j}$ بود، ستون جدید را به ماتریس $A_{۲۲}$ وارد می‌کنیم.
- اگر ماتریس‌های $A_{۱۱}$ و $A_{۲۲}$ بدون تغییر باشند، جواب فعلی بهینه است.

۳-۳ مدل با رول‌های میانی اختیاری (مجهول)

در بخش‌های قبلی، مدل LP را برای یک CSP دو مرحله ای نوشته و در صورت معلوم بودن همه سایزهای میانی، با وجود عدم قطعیت در الگوهای برش با استفاده از تولید ستون و سیمپلکس اصلاح شده حل نمودیم. اما اگر سایز رول‌های میانی معلوم نباشد، با شرایط حادتری روبرو هستیم. برای حل مساله مجازیم هر اندازه میانی مناسب y را از محدوده $[y^{\min}, y^{\max}]$ انتخاب کنیم. از آنجا که هر رول میانی و پایانی، مربوط به یک سطر از ماتریس LP در مساله (۳-۳) - (۳-۱) است، عدم قطعیت در ماتریس LP در دو جهت گسترش می‌یابد، هم در جهت ستون‌ها (عدم قطعیت در الگوهای برش) و هم در جهت سطرها (عدم قطعیت در سایزهای میانی) . به همین دلیل تکنیک تولید ستون به تنهایی نمی‌تواند مساله را حل کند.

یک روش ابتدایی برای حل این مساله، آن است که همه رول‌های میانی ممکن را در نظر گرفته و مانند قبل آن را حل کنیم. در شرایط واقعی، می‌توان مقدار پتانسیل رول‌های میانی را برآورد کنیم. فرض کنید $\triangle y = y^{\max} - y^{\min}$ دامنه تغییرات سایزهای میانی باشد که معمولا $\triangle y \approx ۸۰۰mm$ است. فرض کنید d دقت پهنای رول باشد که معمولا $d = ۰/۵mm$ است. لذا تقریبا $n = \frac{\triangle y}{d} \approx ۱۶۰۰$ سایز مختلف برای رول‌های میانی خواهیم داشت. با این وجود اندازه ماتریس LP کامل به مقدار بسیار بزرگی میل می‌کند، که قطعا در تولید جواب بهینه بسیاری از آنها نقش ندارند و فقط باعث افزایش محاسبات می‌شوند.

از طرف دیگر تفاوت عمده در رول‌های میانی در زمان کاهش جریان مواد، ردیابی را پیچیده می‌کند و انعطاف‌پذیری کمتری را در عملیات برش ایجاد می‌کند. لذا یک کارخانه کاغذ با حداقل مقدار رول‌های متفاوت کار می‌کند. واضح است که این روش کارآمد نیست.

بنابراین نیاز به یک رویکرد هوشمند برای تولید سایزهای میانی (سایزهایی که می‌توانند مفید باشند) داریم. چنانکه در تکنیک تولید ستون به جای بررسی همه الگوهای برش ممکن،فقط الگوهای مورد نیاز برای تولید را بررسی کردیم. در ادامه، تکنیک تولید سطر و ستون را برای مساله دو مرحله‌ای (۳-۱) - (۳-۳) ارائه خواهیم کرد.

۳-۳-۱ تولید سطر و ستون

به خاطر داریم که ردیف‌های ماتریس LP سایز رول‌های میانی و پایانی را نشان می‌دهند. (اگر قیدی در رول‌های اولیه داشته باشیم، آنها نیز به عنوان سطرهای اضافی به مساله اضافه خواهند شد.) ستون‌های ماتریس LP نیز الگوهایی برای برش رول‌های اولیه به رول‌های میانی و رول‌های میانی به رول‌های پایانی هستند.

با استفاده از مساله‌های کوله پشتی ۱ و ۲، الگوهای برش را بهینه می‌کردیم. در اینجا با نوع سومی از مساله کمکی متناظر با تولید همزمان رول‌های میانی و الگوی برش مواجه هستیم. تلاش می‌کنیم سیمپلکس اصلاح شده را به

کاری غیر معمول وفق دهیم. در سیمپلکس اصلاح شده در هر تکرار یک ستون وارد پایه شده و جایگزین ستون دیگر می‌شود که باید پایه را ترک کند.

اگر ستون‌ها قابل شناسایی نباشند از تکنیک تولید ستون استفاده می‌کنیم،اما در سیمپلکس اصلاح شده قادر به تولید سطر نخواهیم بود. اکنون سوال این است که چگونه می‌توان رول‌های میانی مجهول را ایجاد کرد؟

فرض کنیم در هر تکرار از سیمپلکس اصلاح شده فقط یک رول میانی جدید داشته باشیم. در صورت داشتن یک سایز میانی جدید، یک سطر به ماتریس LP اضافه می‌شود. یعنی در حالت ناتباهیدگی، رتبه ماتریس LP یک واحد افزایش می‌یابد. بنابراین ماتریس پایه‌ای باید توسط یک سطر و یک ستون گسترش یابد و از آنجا که در گام محورگیری سیمپلکس باید یک ستون به پایه وارد شده و جایگزین ستون خروجی شود، نتیجه می‌گیریم که برای تولید سطر، در واقع باید در هر تکرار دو ستون جدید تولید شود، یکی از آنها باید بدون قید و شرط به پایه اضافه شود (از آن برای گسترش ماتریس پایه استفاده می‌کنیم) و دیگری باید جایگزین ستون خروجی باشد.

دانستیم برای تولید سطر جدید، باید یک سطر و یک ستون به ماتریس اضافه شود. فرض کنید می‌خواهیم این سطر جدید (رول‌های میانی جدید) را به انتهای ماتریس پایه قبلی اضافه کنیم. برای این منظور بدون آنکه به مساله خللی وارد شود، مدلLP (۳-۱) - (۳-۳) را به فرم زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} min \quad & x_۱, \\ s.t. \quad & \begin{pmatrix} A_{۲۲} & ۰ \\ A_{۱۲} & A_{۱۱} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_۲ \\ x_۱ \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} b \\ ۰ \end{pmatrix}, \\ & x_۱, x_۲ \geq ۰. \end{aligned} \tag{۱۲-۳}$$

توجه شود که مدل LP تغییری نکرده است. فقط الگوهای مربوط به سایزهای میانی در سطرهای آخر ماتریس قرار گرفته‌اند تا با اضافه شدن یک سایز میانی جدید به سطر آخر، فرم مساله به هم نخورد.

فرض کنید متغیر z سایز میانی جدید و v متغیر دوگان متناظر با آن برای سطر جدید باشد. لذا برای سایزهای میانی بردار $[y, z]^T$ و برای متغیرهای دوگان متناظر با رول‌های میانی $[u_۱, v]^T$ را خواهیم داشت که بردارهایی از مرتبه $k + ۱$ هستند. لازم به ذکر است k تعداد سایزهای میانی موجود است که در هر تکرار سیمپلکس ممکن است مقدار آن افزایش یابد.(اما در مدل قبلی که سایزهای میانی از قبل معلوم بود، مقدار k نیز تغییر نمی‌کرد)

با توجه به سایزهای جدید z ، باید هر رول اولیه $w_۰$ را بر اساس ترکیبی از رول‌های میانی موجود برش بزنیم و همچنین سایز میانی z را نیز باید براساس ترکیبی خطی از سایزهای پایانی برش داد. در واقع ترکیبی از مساله کوله

پشتی ۱ و ۲ را داریم که به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\text{(کوله پشتی ۳)}: \quad max \quad u_1^T a_1 + va \tag{۳-۱۳}$$

$$s.t. \quad y^T a_1 + za \leqslant w_0, \tag{۳-۱۴}$$

$$w^T a_2 \leqslant z - e^{\min}, \tag{۳-۱۵}$$

$$u_2^T a_2 = v, \tag{۳-۱۶}$$

$$v \geqslant 0, \tag{۳-۱۷}$$

$$y^{\min} \leqslant z \leqslant y^{\max}, \tag{۳-۱۸}$$

$$a_1, a_2 \in Z^+, \tag{۳-۱۹}$$

اینجا متغیرها دو ستون جدید هستند. ستون a_1 برای مرحله اول و ستون a_2 برای مرحله دوم. توجه شود که قید (۳-۱۶) به صورت تساوی است. a یک عدد صحیح است که تعداد رول‌های میانی جدید در الگوی برش مرحله اول را نشان می‌دهد. بنابراین $\lfloor \frac{w_0 - e^{\min}}{y^{\min}} \rfloor ,..., 1, 2 = a$ است. در حالت $a = 0$ مساله به کوله پشتی ۱ کاهش می‌یابد.

اکنون سعی می‌کنیم کوله پشتی ۳ را به شکل خلاصه تری بنویسیم.

گزاره ۳-۳-۱. کافی است فقط رول‌های میانی را که عرض آنها ممکن است به عنوان ترکیب خطی از سایزهای پایانی به اضافه لبه حداقل $e^{\min}$ ارائه شود، بررسی کنیم:

$$z = e^{\min} + w^T x, \tag{۳-۲۰}$$

که در آن x یک بردار صحیح است.

برهان. واضح است که سایز میانی مطلوب آن است که ضایعاتی به همراه نداشته باشد به عبارت دیگر براساس ترکیبی از سایزهای پایانی باشد. فرض کنید، جوابی برای مساله دو مرحله‌ای (۳-۱۲) پیدا کنیم و در نهایت رول میانی z به فرم رابطه (۳-۲۰) ارائه نشود، در این صورت می‌توان اندازه z را به نزدیک ترین مقدار خود را کاهش داد به گونه‌ای که آن را بتوان توسط (۳-۲۰) و یا $y^{\min}$ نوشت. چنین کاهشی مجاز است زیرا که قیود مساله را نقض نمی‌کند و تمام الگوهای هردو مرحله شامل رول میانی z اعتبار خود را حفظ می‌کنند. کاهش در مرحله اول با کاهش در مرحله دوم جبران خواهد شد و تابع هدف مقدار خود را حفظ می‌کند.□

گزاره (۳-۳-۱) وقیود (۳-۱۵) و (۳-۱۶) مجوز حذف متغیرهای z و v از مدل مساله را با استفاده از نمایش خطی متغیرهای $a_۲$ ، می‌دهد. مساله اصلاح شده توسط مساله کوله پشتی زیر ارائه می‌شود :

$$\begin{aligned}
(\text{کوله پشتی } ۳')\ :\quad & max \quad u_۱^T a_۱ + u_۲^T a_۲ a \\
& s.t. \quad y^T a_۱ + w^T a_۲ a \leqslant w_۰ - e^{\min} a, \\
& \qquad y^{\min} \leqslant e^{\min} + w^T a_۲ \leqslant y^{\max}, \\
& \qquad a_۱, a_۲ \in Z^+, a \in \{۱, ۲, ..., \lfloor \frac{w_۰ - e^{\min}}{y^{\min}} \rfloor\}.
\end{aligned} \tag{۳-۲۱}$$

واضح است که کوله پشتی ′۳ ، یک مساله کوله پشتی غیر خطی است. غیر خطی بودن به دلیل وجود $a_۲ a$ در تابع هدف و قیود است. در فصل بعد ، روش‌هایی برای حل این کوله پشتی ارائه خواهیم کرد.
از حل این مساله دو ستون $a_۱$ ، $a_۲$ برای مراحل اول و دوم و سایز میانی جدید $z = e^{min} + w^T a_۲$ به دست می‌آید. توجه شود که $a_۱$ یک ستون k تایی و $a_۲$ یک ستون m تایی است. همان طور که بیان شد، این دو ستون باید در ماتریس پایه LP در مساله (۳-۲۱) قرار بگیرند. اکنون چگونگی انجام این کار و تولید سطر جدید را توسط آنها بیان خواهیم کرد. ابتدا گزاره زیر را بیان می‌کنیم.

گزاره ۳-۳-۲. فرض کنید B یک ماتریس نامنفرد $n \times n$ باشد و B_a فرم افزوده آن با اضافه کردن یک سطر و یک ستون به صورت زیر باشد:

$$B_a = \begin{pmatrix} B & a \\ ۰^T & -۱ \end{pmatrix}, \tag{۳-۲۲}$$

که در آن a و ۰ بردارهایی n بعدی هستند. در این صورت ماتریس معکوس $B_a^{-۱}$ وجود دارد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$B_a^{-۱} = \begin{pmatrix} B^{-۱} & B^{-۱} a \\ ۰^T & -۱ \end{pmatrix}. \tag{۳-۲۳}$$

برهان. با توجه به نامنفرد بودن B داریم:

$$\begin{pmatrix} B & a \\ \circ^T & -۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^{-۱} & B^{-۱}a \\ \circ^T & -۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BB^{-۱} & BB^{-۱}a - a \\ \circ^T & ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & \circ \\ \circ & ۱ \end{pmatrix} = I_{n+۱}.\square$$

گزاره بالا نشان می‌دهد که با داشتن یک ستون a هم بعد با ماتریس پایه B چگونه می‌توان یک سطر جدید اضافه کرد به گونه‌ای که ماتریس افزوده نیز وارون پذیر باشد.

از حل کوله پشتی ′۳ ، ستون k بعدی $a_۱$ برای مرحله اول و ستون m بعدی $a_۲$ را برای مرحله دوم به دست می‌آوریم.
با توجه به اینکه در مساله LP، (۳-۱۲) ماتریس پایه از مرتبه $m + k$ است و همچنین در آن ابتدا الگوهای برش مرحله دوم و سپس الگوهای برش مرحله اول آمده است، لذا برای اضافه کردن این دو ستون به پایه، ابتدا آنها را با استفاده از بردار صفر به صورت زیر گسترش می‌دهیم.

$$\overline{a_۱} = \begin{pmatrix} \circ \\ a_۱ \end{pmatrix}, \qquad \overline{a_۲} = \begin{pmatrix} a_۲ \\ \circ \end{pmatrix}.$$

در اینجا ستون $\overline{a}_۱$ شامل $(m+k)$ مولفه است، m سطر اول صفر و k سطر بعدی درایه‌های $a_{۱۱}$ هستند. همچنین ستون $a_۲$ ، $(m + k)$ مولفه دارد، m سطر اول داریه های $\overline{a}_۲$ و k سطر آخر صفر هستند.

از ستون $\overline{a}_۲$ که الگوی برش مرحله دوم برای برش رول‌های پایانی از رول میانی جدید است، برای گسترش ماتریس پایه به صورت (۳-۲۲) استفاده می‌کنیم. به عبارت دیگر، ماتریس $\overline{a}_۲$ را به ستون آخر ماتریس LP ، و سپس سطر $(۰, ۰, \ldots, ۰, -۱)$ را به سطر آخر اضافه می‌کنیم، عدد (-۱) در سطر و ستون آخر بیانگر همان درایه (-۱) در ماتریس $A_{۱۲}$ است.

اکنون مرتبه ماتریس پایه یک واحد افزایش پیدا کرده است. بنابراین ستون $\begin{pmatrix} \overline{a}_۱ \\ a \end{pmatrix}$ را با استفاده از آزمون نسبت وارد پایه کرده و جایگزین ستون خروجی می‌کنیم.

۳-۴ انتخاب ستون اصلاح شده در الگوریتم سیمپلکس

با توجه به مطالب بیان شده ،گام انتخاب ستون (انتخاب ستون اصلاح شده) در الگوریتم سیمپلکس اصلاح شده بدین شرح است:

گام ۱. مساله کوله پشتی ۱ را حل کنید. اگر مقدار بهینه بیش از ۱ بود ،آنگاه جواب $a_۱$ یک ستون برای ورود به پایه در گام محورگیری الگوریتم سیمپلکس اصلاح شده است. در غیر این صورت به مرحله ۲ بروید.

گام ۲. مساله کوله پشتی ۲ را برای هر رول میانی y_j ، $j = ۱, ۲, ..., k$ حل کنید. اگر جواب بهینه برای مساله jام بیش از $u_{۱j}$ بود، آنگاه ستون $a_۲$ یک ستون برای ورود به پایه در گام محورگیری الگوریتم سیمپلکس اصلاح شده است. در غیر این صورت به مرحله ۳ بروید.

گام ۳. کوله پشتی $۳'$ را حل کنید. اگر جواب بهینه،تابعی بیش از ۱ بود آنگاه

- ماتریس پایه را با یک سطر و یک ستون گسترش دهید.
- ستون دیگر را به عنوان ستون وارد شونده به پایه در گام محورگیری الگوریتم سیمپلکس اصلاح شده انتخاب کنید.

در غیر این صورت، پاسخ فعلی بهینه است.

برای شروع الگوریتم y^{min} را به عنوان تنها رول میانی موجود در نظر گرفته و در تکرارهای بعدی سیمپلکس، لیست رول‌های میانی را گسترش می‌دهیم. برای تفهیم بهتر مطالب بیان شده مثال زیر را بررسی می‌کنیم.

مثال ۳-۴-۱. فرض کنید رول‌های $۵۰۰۰mm$ داریم. ماشین اول رول‌هایی بین $۱۲۰۰mm$ تا $۱۹۰۰mm$ تولید می‌کند. ماشین دوم سایزهای پایانی را برش می‌زند. باید۸۷ رول $۳۴۰mm$ و ۱۵۰ رول $۵۰۰mm$ تولید کنیم. می‌خواهیم بدانیم برای استفاده بهینه مواد اولیه، بهتر است ماشین اول چه سایزهای را برش بزند؟

در این مثال داریم: $\quad m = ۲, \qquad y^{\min} = ۱۲۰۰, \qquad y^{\max} = ۱۹۰۰$

برای شروع الگوریتم فرض می‌کنیم $y_۱ = y^{min} = ۱۲۰۰$. بنابراین مساله (۳-۱۲) به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
& min \quad x_{۱۱}, \\
& s.t. \quad \begin{pmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ -۱ & -۱ & ۴ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{۲۱} \\ x_{۲۲} \\ x_{۱۱} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} ۸۷ \\ ۱۵۰ \\ ۰ \end{pmatrix}, \\
& \qquad x_{۱۱}, x_{۲۱}, x_{۲۲} \geq ۰.
\end{aligned}$$

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} ۱/۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱/۲ & ۰ \\ ۱/۱۲ & ۱/۸ & ۱/۴ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۸۷ \\ ۱۵۰ \\ ۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۲۹ \\ ۷۵ \\ ۲۶ \end{pmatrix},$$

$$c_B B^{-1} = [۰\ ۰\ ۱]B^{-1} = [۱/۱۲\ \ ۱/۸\ \ ۱/۴],$$

$$\Longrightarrow x_{۲۱} = ۲۹, \qquad x_{۲۲} = ۷۵, \qquad x_{۱۱} = ۲۶,$$

$$u_{۲۱} = ۱/۱۲, \qquad u_{۲۲} = ۱/۸, \qquad u_{۱۱} = ۱/۴.$$

جواب شدنی اولیه بیان می‌کند که برای تامین تقاضا باید ۲۶ رول $۵۰۰۰mm$ مصرف شود. به دنبال بیهینه کردن این جواب با استفاده از رول‌های میانی جدید هستیم.

بر اساس آنچه در انتخاب ستون بیان شد، مساله‌های کوله پشتی ۱ و ۲ و ′۳ را بررسی می‌کنیم.

(کوله پشتی ۱) : $\begin{cases} max & \frac{۱}{۴}a_۱ \\ s.t. & ۱۲۰۰a_۱ \leqslant ۵۰۰۰, \end{cases} \qquad \Longrightarrow a_۱ = \lfloor \frac{۵۰۰۰}{۱۲۰۰} \rfloor = ۴.$

مقدار تابع هدف برابر است با $۱ = (۴)\frac{۱}{۴}$. لذا کوله پشتی ۲ را بررسی می‌کنیم.

(کوله پشتی ۲) : $\begin{cases} max & \frac{۱}{۱۲}a_{۲۱} + \frac{۱}{۸}a_{۲۲} \\ s.t. & ۳۴۰a_{۲۱} + ۵۰۰a_{۲۲} \leqslant ۱۲۰۰ - ۵۰ = ۱۱۵۰, \end{cases} \qquad \Longrightarrow a_{۲۱} = ۳, \quad a_{۲۲} = ۰.$

مقدار تابع هدف $\frac{۱}{۴} = (۰)\frac{۱}{۸} + (۳)\frac{۱}{۱۲}$ و همچنین $\frac{۱}{۴} = u_{۱۱}$ ، بنابراین کوله پشتی ′۳ را بررسی می‌کنیم.

(کوله پشتی ′۳) : $\begin{cases} max & \frac{۱}{۴}a_{۱۱} + \frac{۱}{۱۲}aa_{۲۱} + \frac{۱}{۸}aa_{۲۲} \\ s.t. & ۱۲۰۰a_{۱۱} + ۳۴۰aa_{۲۱} + ۵۰۰aa_{۲۲} \leqslant ۵۰۰۰ - ۵۰a, \\ ۱۲۰۰ \leqslant ۵۰ + ۳۴۰a_{۲۱} + ۵۰۰a_{۲۲} \leqslant ۱۹۰۰, \\ a_{۲۱}, a_{۲۱}, a_{۲۱} \in Z^+, a \in \{۱, ۲, ۳, ۴\} \end{cases} \qquad \Longrightarrow \begin{cases} a = ۱, \\ a_{۱۱} = ۳, \\ a_{۲۱} = ۱, \\ a_{۲۲} = ۲. \end{cases}$

در مورد روش‌های حل این کوله پشتی در فصل بعد صحبت خواهد شد. سایز رول میانی جدید به دست آمده

$y_۲ = z = ۵۰ + ۳۴۰(۱) + ۵۰۰(۲) = ۱۳۹۰$ است.

با توجه به اینکه مقدار تابع هدف بیش‌تر از یک است از ستون‌های $\overline{a_۱} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۳ \end{pmatrix}$ و $\overline{a_۲} = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۰ \end{pmatrix}$ برای گسترش

پایه که به صورت $\begin{pmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ -۱ & -۱ & ۴ \end{pmatrix}$ بود، استفاده می‌کنیم.

قرار می‌دهیم:

$$B = \begin{pmatrix} ۳ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۰ & ۲ \\ -۱ & -۱ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱ \end{pmatrix}$$

اکنون باید ستون $\begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۳ \\ ۱ \end{pmatrix}$ را جایگزین ستون خروجی کنیم. توجه شود که محورگیری روی سطر جدید اعمال نمی‌شود و روی پایه قبلی انجام می‌گردد.

$$B^{-۱}b = \begin{pmatrix} ۱/۳ & ۰ & ۰ & ۱/۳ \\ ۰ & ۱/۲ & ۰ & ۱ \\ ۱/۱۲ & ۱/۸ & ۱/۴ & ۱/۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۸۷ \\ ۱۵۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۲۹ \\ ۷۵ \\ ۲۶ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

بنابراین ستون سوم از پایه خارج و ستون جدید جایگزین آن می‌شود. لذا در انتهای این تکرار سیمپلکس موارد زیر را خواهیم داشت.

اگر متغیر متناظر با الگوی جدید مرحله اول $\begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۳ \\ ۱ \end{pmatrix}$ را با $r_{۱۱}$ و متغیر متناظر با الگوی جدید مرحله دوم $\begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۰ \\ -۱ \end{pmatrix}$ را با $r_{۲۱}$ نشان دهیم، ماتریس پایه شامل ستون‌های $B = [x_{۲۱}, x_{۲۲}, r_{۱۱}, r_{۲۱}]$ خواهد بود.
تابع هدف مسئله LP فقط شامل الگوهای مرحله اول است. بنابراین داریم:

$$c_B = [۰ \quad ۰ \quad ۱ \quad ۰],$$

$$B = \begin{pmatrix} ۳ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۰ & ۲ \\ -۱ & -۱ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۱ \end{pmatrix} \Longrightarrow B^{-۱} = \frac{۱}{۱۳} \begin{pmatrix} ۴ & -۱/۲ & -۱ & ۳ \\ -۱ & ۵ & -۳ & ۹ \\ ۱ & ۳/۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۳/۲ & ۳ & ۴ \end{pmatrix},$$

$$B^{-۱}b = B^{-۱}[۸۷ \quad ۱۵۰ \quad ۰ \quad ۰]^T = [۲۱ \quad ۵۱ \quad ۲۴ \quad ۲۴],$$

$$\Longrightarrow x_{۱۱} = ۰, \qquad r_{۱۱} = ۲۴, \qquad x_{۲۱} = ۲۱, \qquad x_{۲۲} = ۵۱, \qquad r_{۲۱} = ۲۴,$$

مقدار تابع هدف مساله اصلی برابر $x_{۱۱} + r_{۱۱} = ۲۴$ است که نسبت به قبل کاهش یافته و نشان می‌دهد که برای تامین تقاضا به ۲۴ رول اولیه $۵۰۰۰mm$ نیاز داریم که از آن باید $\binom{۷۲}{۲۴} = \binom{۳}{۱} \times ۲۴$ ، $۷۲ = ۲۱ + ۵۱$ رول $۱۲۰۰mm$ و ۲۴ رول $۱۳۹۰mm$ تولید شود. مقادیر متغیرهای دوگان نیز به صورت زیر هستند:

$$c_B B^{-۱} = [۰ \quad ۰ \quad ۱ \quad ۰]B^{-۱} = [۱/۱۳ \quad ۳/۲۶ \quad ۳/۱۳ \quad ۴/۱۳],$$
$$\Longrightarrow u_{۲۱} = \frac{۱}{۱۳}, \qquad u_{۲۲} = \frac{۳}{۲۶}, \qquad u_{۱۱} = \frac{۳}{۱۳}, \qquad u_{۱۲} = \frac{۴}{۱۳}.$$

برای به دست آوردن جواب بهینه با استفاده از این دستاوردها مجددا الگوریتم تکرار می‌شود تا زمانی که قادر به تولید سایز میانی جدید نباشیم.

فصل ۴

روش‌هایی برای حل مسئله کمکی متناظر با مسئله برش دو مرحله‌ای

۴-۱ مقدمه

در فصل قبل مساله برش دو مرحله ای (۳-۲) را در دو حالت رول‌های میانی اجباری (معلوم) و رول‌های میانی اختیاری (مجهول) به ترتیب با روش تولید ستون و روش تولید سطر و ستون حل کردیم. در روش تولید ستون با دو مساله کمکی کوله پشتی خطی مواجه می‌شویم که با روش‌های معمول (حریصانه ، شاخه و کران ، الگوریتم ژنتیک و ...) حل می‌شود. اما در تولید سطر و ستون به یک مساله کوله پشتی غیر خطی برمی‌خوریم.

$$
\begin{aligned}
(\text{کوله پشتی } 3')\ :\quad max \quad & u_1^T a_1 + u_2^T a_2 a \\
s.t. \quad & y^T a_1 + w^T a_2 a \leqslant w_0 - e^{\min} a, \\
& y^{\min} \leqslant e^{\min} + w^T a_2 \leqslant y^{\max}, \\
& a_1, a_2 \in Z^+, a \in \{1, 2, ..., \lfloor \frac{w_0 - e^{\min}}{y^{\min}} \rfloor\}.
\end{aligned}
\tag{۴-۱}
$$

فرم خاص این مساله غیر خطی (۴-۱) ما را بر آن می‌دارد تا روش‌های حل آن را بررسی کنیم.
در این فصل ابتدا یک روش ساده برای حل این مساله ارائه خواهیم کرد. همچنین با استفاده از یک روش ابتکاری، الگوریتم ژنتیک و روش شاخه و کران به حل آن می‌پردازیم.

۲-۴ روش ساده

با نگاهی دقیق به مساله کوله پشتی (۴-۱)که دلیل غیر خطی بودن آن وجود $a_۲a$ در سطر هدف و قیود است و از طرفی $a \in \{۱, ۲, ..., \lfloor \frac{w_۰ - e^{\min}}{y^{\min}} \rfloor\}$ است ، معلوم می‌شود که اگر مقدار a مشخص باشد، مساله غیر خطی به یک کوله پشتی خطی تبدیل می‌شود که می‌توان آن را با روش‌های معمول حل کرد.
با توجه به متناهی بودن تعداد امکان‌های مختلف a ، لازم است تا $\lfloor \frac{w_۰ - e^{\min}}{y^{\min}} \rfloor$ مساله کوله پشتی خطی را حل کنیم تا با مقایسه آنها، بهترین جواب تعیین شود.
به عنوان مثال، در کوله پشتی غیر خطی بدست آمده در مثال (۳-۴-۱) که در آن $a \in \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ است لازم است مساله را به ۴ کوله پشتی خطی تبدیل و آنها را حل کنیم.

۳-۴ روش ابتکاری

ایده این است که مساله را به زیر مسئله‌های ساده‌تر تقسیم کرده و آنها را جداگانه حل کنیم.
زیر مسئله ۱ : فقط شرط $y^{min} \leqslant e^{min} + w^T a_۲ \leqslant y^{max}$ را بررسی کرده و تمام جواب‌های شدنی آن را به دست می‌آوریم.
زیر مسئله ۲ : با قرار دادن جواب‌های به دست آمده در مرحله قبل در مسئله (۴-۱) داریم :

$$\begin{aligned} max \quad & u_۱^T a_۱ + u_۲'^T a \\ s.t. \quad & y^T a_۱ + w'^T a \leqslant w_۰ - e^{\min} a, \\ & y^{\min} \leqslant e^{\min} + w^T a_۲ \leqslant y^{\max}, \\ & a_۱ \in Z^+, a \in \{۱, ۲, ..., \lfloor \frac{w_۰ - e^{\min}}{y^{\min}} \rfloor\}. \end{aligned}$$

که در آن $u_۲' = u_۲ a_۲$ و $w' = wa_۲$.
این کوله پشتی خطی را با روش‌های معمول حل می‌کنیم. با مقایسه مقادیر تابع هدف به دست آمده،جواب بهینه تعیین می‌شود.

ملاحظه: با توجه به اینکه در هر تکرار از روش تولید سطر و ستون، سایزهای پایانی ثابت هستند و تغییر نمی‌کنند. کافی است زیر مساله ۱ ، فقط یک بار بررسی شود. جواب‌های بدست آمده برای آن در تکرارهای بعدی که کوله پشتی ′۳ جدید تولید می‌شود، قابل استفاده است. به عبارت دیگر،بنا به تغییرات بردار سایزهای میانی y،

فقط لازم است زیر مساله ۲ بررسی شود.

۴-۴ الگوریتم ژنتیک

همان طور که در فصل دوم بیان شد به طور خلاصه، در الگوریتم ژنتیک هر جواب شدنی برای مساله به عنوان یک کروموزوم معرفی می‌شود که کروموزوم‌ها شامل ژن‌ها (عناصر جواب) هستند. در هر نسل، کروموزوم‌ها بر اساس تابع برازندگی ارزیابی می‌شوند و متناسب با ارزش خود امکان بقا و تکثیر می‌یابند. تولید نسل، از یک جفت کروموزوم اولیه و با عملگرهای برش و جهش صورت می‌گیرد. والدین برتر بر اساس تابع برازندگی توسط عملگر انتخاب، انتخاب می‌شوند. وظیفه روش انتخاب پیدا کردن کاندیداهایی است که ترکیب آنها سبب بهبود جواب‌ها در نسل بعد می‌شود.

برای استفاده از این الگوریتم در حل مساله کوله پشتی (۴-۱) گام‌های زیر را بررسی می‌کنیم.

گام اول: تعیین داده‌های اولیه مساله

این داده ها شامل مقدار متغیرهای دوگان میانی و پایانی $u_۲$ و $u_۱$ و سایزهای میانی و پایانی y و w و تعداد تکرار روش الگوریتم ژنتیک و تعداد فرزندان تولید شده در هر مرحله هستند.

گام دوم: تولید دو کروموزوم والد برای شروع الگوریتم

با توجه به اینکه مساله (۴-۱) شامل k متغیر $a_۱$ (متناظر با سایزهای میانی) و m متغیر $a_۲$ (متناظر با سایزهای پایانی) و یک متغیر a (متناظر با سایز میانی جدید) است. لذا هر کروموزوم باید شامل $(m + k + ۱)$ ژن باشد. k ژن اول مقادیر $a_۱$ ، m ژن بعدی مقادیر $a_۲$ و آخرین ژن مقدار a را نشان می‌دهد.

همچنین $a \in \{۱, ۲, ..., \lfloor \frac{w_۰ - e^{\min}}{y^{\min}} \rfloor\}$ است.

برای تولید کروموزم‌های والد، ابتدا یک جواب بهینه برای مساله زیر به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} max \quad u_۲^T a_۲ \\ s.t. \qquad y^{\min} \leqslant e^{\min} + w^T a_۲ \leqslant y^{\max}, \\ \qquad\quad a_۲ \in Z^+. \end{cases}$$

پس از مشخص شدن مقادیر $a_۲$ ، کروموزوم‌های اولیه را به صورت زیر تولید می‌کنیم:

$$k_۱ = \begin{bmatrix} \underbrace{\circ \cdots \circ}_{k \text{ بار}} & a_۲ & \lfloor \frac{w_\circ - e^{\min}}{y^{\min}} \rfloor \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} ۱ & \underbrace{\circ \cdots \circ}_{k-۱ \text{ بار}} & a_۲ & ۱ \end{bmatrix}.$$

واضح است که $k_۱$ و $k_۲$ جواب‌های شدنی برای مساله (۴-۱) هستند.

به عنوان نمونه مثال (۳-۴-۱) در کوله پشتی، $k = ۱$ و $m = ۲$ لذا خواهیم داشت:

$$k_۱ = \begin{bmatrix} \circ & ۱ & ۳ & ۴ \end{bmatrix}, \qquad k_۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}.$$

گام سوم: تولید فرزندان

در این پژوهش، برای تولید تعداد مشخصی فرزند، تابعی نوشتیم که در آن $k_۱$ و $k_۲$ به عنوان والد اولیه در آن فراخوانی می‌شود. فرزندان با عملگرهای برش و جهش تولید می‌شوند.

برش:

از برش یک نقطه ای استفاده می‌کنیم. ابتدا یک عدد تصادفی بین ۱ تا $m + k$ انتخاب می‌شود. سپس تمام ژن‌های طرف راست این موقعیت در کروموزوم‌های والد با یکدیگر جابه‌جا می‌شوند تا کروموزوم‌های جدید بدست آید.

به عنوان مثال، با فرض اینکه عدد تصادفی به دست آمده ۲ باشد. بعد از عمل برش تک نقطه‌ای خواهیم داشت:

$$k_۳ = \begin{bmatrix} \circ & ۱ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}, \qquad k_۴ = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۳ & ۴ \end{bmatrix}.$$

جهش:

برای جهش از روش تعویضی استفاده می‌کنیم. در این روش دو ژن به طور تصادفی انتخاب شده و جای آنها را با هم عوض می‌کنیم. دو عدد تصادفی بین ۱ تا $m + k + ۱$ بدست می‌اوریم.

فرض کنیم اعداد تصادفی بدست آمده ۲ و ۳ باشد. با جهش تعویضی روی هر یک از کروموزوم‌های والد $k_۱$ و $k_۲$ داریم:

$$k_۵ = \begin{bmatrix} \circ & ۳ & ۱ & ۴ \end{bmatrix}, \qquad k_۶ = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}.$$

گام چهارم: تابع برازندگی

در این مرحله، مساله کوله پشتی (۴-۱) را توسط هر یک از کروموزوم‌های بدست آمده بررسی می‌کنیم. اگر کروموزوم در شرایط مساله صدق نکند مقدار تابع برازندگی را صفر در نظر می‌گیریم و اگر جواب شدنی باشد، مقدار تابع برازندگی همان مقدار تابع هدف خواهد بود.

مثال ۴-۴-۱. در مساله کوله پشتی ′۳ بدست آمده در مثال (۳-۴-۱) داریم:

$$\begin{cases} max \quad \frac{1}{4}a_{11} + \frac{1}{12}aa_{21} + \frac{1}{8}aa_{22} \\ s.t. \quad 1200a_{11} + 340aa_{21} + 500aa_{22} \leqslant 5000 - 50a, \\ 1200 \leqslant 50 + 340a_{21} + 500a_{22} \leqslant 1900. \end{cases}$$

بنابراین مقدار تابع برازندگی برای کروموزوم k_i به صورت زیر خواهد بود:

$$f_1 = \frac{11}{6}, \quad f_2 = \frac{17}{24}, \quad f_3 = \frac{11}{24}, \quad f_4 = \frac{25}{12}, \quad f_5 = \frac{3}{2}, \quad f_6 = \frac{5}{8}.$$

گام پنجم: انتخاب

در این مرحله کروموزوم‌های برتر بر اساس مقدار تابع برازندگی انتخاب می‌شوند تا به عنوان والدین نسل بعد مورد استفاده قرار بگیرند. در اینجا برای عملگر انتخاب از روش چرخ رولت که در فصل دوم معرفی شده، استفاده می‌کنیم.

گام ششم: شرط خاتمه

شرط خاتمه الگوریتم را بررسی می‌کنیم. اگر شرط برقرار نباشد، الگوریتم به گام سوم می‌رود و دوباره تکرار می‌شود. در اینجا شرط خاتمه این است که بیشترین درجه برازش فرزندان حاصل شود یا دیگر نتایج بهتری حاصل نشود.

کروموزومی که بیشترین برازندگی را داشته باشد، جواب بهینه مساله است.

۴-۵ روش شاخه و کران

مساله کوله پشتی کلاسیک به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} max \quad & c^T x \\ s.t. \quad & a^T x \leqslant b \\ & x \in Z^+, \end{aligned}$$

تمام پارامترهای مساله $\{c, a, b\}$ ، ضرایب تابع هدف و پارامتر های تک قید مثبت فرض می شوند. الگوریتم شاخه وکران پیشنهادی گیلمور و گوموری [۲۴] به شرح زیر است.

موارد را به ترتیب نزولی به نسبت $\frac{c_i}{a_i}, \quad i = ۱, ۲, ..., m,$ مرتب کنید، که m بعد بردارها ست.

بدون از دست دادن کلیت، می توانیم فرض کنیم $\frac{c_۱}{a_۱} \geqslant \frac{c_۲}{a_۲} \geqslant ... \frac{c_m}{a_m}$.

گام ۱ : شروع می کنیم با فهرستی اولیه از مقادیر k، f^* و b^{rest} .

k اندیس متغیر شاخه ای است که در ابتدا $k = ۰$ ، f^* مقدار تابع هدف است و $f^* = ۰$ و b^{rest} یک پارامتر کاری است که بخش باقی مانده (پرنشده) کوله پشتی را نشان می‌دهد، $b^{rest} = b$ (این پارامتر کاری را نمی توانید در مقاله اصلی بیابد اما به محض شروع به برنامه نویسی الگوریتم نمایان می شود.)

گام ۲ : بیشترین دلیل گسترش شاخه فعلی را بیابید.

به طور تکراری از $i = k + ۱$ تا m قرار دهید:

$$x_i = \lfloor b^{rest}/a_i \rfloor, \quad \text{و} \quad b^{rest} = b^{rest} - a_i x_i.$$

گام ۳ : آیا پاسخ بهتری به دست آمد؟

مقدار تابع هدف $f = c^T x$ را محاسبه کنید و با مقدار ثبت شده مقایسه کنید. اگر $f > f^*$ در این صورت x^* را با x و f^* را با f جایگزین کنید.

گام ۴ : به شاخه بعدی بروید. اگر $x_k = ۱$ ، توقف کنید. در غیر این صورت مقدار k را ۱ واحد کاهش دهید تا زمانی که اولین k با $x_k > ۰$ به دست آید. اگر $x_k > ۱$ ، در این صورت قرار دهید

$$x_k = x_k - ۱, \quad \text{و} \quad b^{rest} = b^{rest} + a_k.$$

جدول ۴-۱: سایز رول‌های اولیه و پایانی

i	w_i (mm)	b_i	Roll type
0	5000	–	Stock
1	320	72	Finished
2	340	88	Finished
3	450	150	Finished
4	500	108	Finished

جدول ۴-۲: ماشین‌ها

Stage	y^{min} (mm)	y^{max} (mm)	e^{min} (mm)	Maximum rolls out
1	–	–	0	3
2	1200	1900	50	5

گام۵ : آیا شاخه ارزش بررسی دارد؟

پتانسیل شاخه ای با استفاده از یک کران بالای دنباله در حال کار کوله پشتی برآورد می شود. دنباله در حال کار کوله پشتی با اندیس $k+1$ شروع می شود و مقدار بهینه غیر صحیح $x_{k+1} = b^{rest}/a_{k+1}, x_{k+2} = \ldots = x_m = 0$ است. بنابراین اگر $\sum_{i=1}^{k} c_i x_i + c_{k+1} b^{rest}/a_{k+1} > f^*$ شاخه قابل بررسی است. به گام ۲ بروید و در غیر این صورت به گام ۴ بروید.

این الگوریتم شاخه و کران پایه ای است. برای کوله پشتی $3'$، مرحله ۲ با بررسی صحت قید دو طرفه (۳-۲۱) کامل می شود. اگر بررسی با شکست مواجه شد به گام ۴ بروید.

۴-۶ مسئله نمونه

اکنون که به طور کامل با تکنیک تولید سطر و ستون برای مسئله " برش دومرحله‌ای با رول‌های میانی اختیاری " آشنا شدیم، به عنوان نمونه مسئله زیر را با استفاده از برنامه متلب حل کرده و روند حل آن را بررسی می‌کنیم.

مثال ۴-۶-۱. فرض کنید ۴ سایز پایانی برای برش وجود دارد. دو دستگاه برش دو مرحله را انجام می دهند. دستگاه اول رول های ماده اولیه را به رول های میانی برش می دهد و دیگری رول های میانی را به رول پایانی برش می زند. داده های ورودی در جدول (۴-۱) و (۴-۲) داده شده است.

برای شروع، یک پاسخ اولیه تولید خواهیم کرد و لیست اولیه از رول های میانی را توسط یک رول قطعی محدود می‌کنیم :

$y_1 = y^{\min} = 1200mm$ بنابراین یک الگو برای مرحله اول تولید رول های $1200mm$ و چهار الگو از مرحله دوم برای هر رول نهایی داریم.

جدول ۴-۳: ماتریس پایه اولیه

تابع هدف	1	0	0	0	0	RHS	مقادیر دوگان
الگوهای فعال \(mm) سایزها	60.777	24	29.333	75	54		
1200	3	−1	−1	−1	−1	0	0.333
320	0	3	0	0	0	72	0.111
340	0	0	3	0	0	88	0.111
450	0	0	0	2	0	150	0.166
500	0	0	0	0	2	108	0.166

ماتریس پایه ای اولیه در جدول (۴-۳) مشخص شده است. مقدار تابع هدف ۶۰/۷۷۷ است.
جدول (۴-۴) دینامیک حل مساله را نشان می دهد. جالب است بدانیم که الگوریتم چگونه ستون های جدید (الگوها) و سطرهای جدید (اندازه های میانی) را تولید می کند.

مساله با ماتریس اولیه که در جدول (۴-۴) بولد است شروع شده است. سپس الگوهای ۹ و ۱۰ در طی تولید ستون از حل کوله پشتی۲ ایجاد شدند. سپس یک اندازه میانی ۱۹۰۰mm همراه با دو الگوی جدید ۱۱ و۱۲ از حل کوله پشتی ۳ ایجاد شد. بعد الگوریتم از اندازه جدید استفاده می کند و ستون های جدید ۱۶ − ۱۳ را تولید می کند. سپس یک اندازه میانی جدید ۱۶۹۰mm همراه با دو الگوی ۱۷ و ۱۸ تولید شد و به همین ترتیب ادامه دارد.

پنج رول میانی ۱۷۱۰mm ,۱۳۹۰ ,۱۶۹۰ ,۱۹۰۰ ,۱۲۰۰ در جواب بهینه وجود دارد. ستون هایی که هایلات شده اند الگوهای فعال در ماتریس پایه بهینه هستند. در سطر دوم جدول که تعداد دفعاتی که باید از این الگوها استفاده شود، نشان داده شده است. قاعدتاً الگوهایی که در ماتریس پایه حضور ندارند مقدار صفر دارند.

از بین الگوهای فعال پایه بهینه، الگوهای ۱۰، ۱۲، ۱۴، ۲۰، ۲۳، ۲۳، ۲۴ و ۲۵ الگوهای برش مرحله دوم هستند. الگوهای ۱۳ و۲۲ الگوهای برش مرحله اول هستند که مقدار آن‌ها به ترتیب ۱۴ و ۲۲ است. لذا الگوریتم یک پاسخ بهینه با ۲۲+۱۴= ۳۶ مجموعه از مرحله اول پیدا می کند، به عبارت دیگر ۳۶ رول اولیه برای تامین تقاضا نیاز داریم.

الگوهای ۱۰ و ۱۴ از رول‌های ۱۲۰۰mm استفاده می کند. الگوی ۱۲ از رول ۱۹۰۰mm ، الگوهای ۲۰ و ۲۵ از رول ۱۳۹۰mm، الگوی ۲۳ از رول ۱۷۱۰mm و الگوی ۲۴ از رول ۱۶۹۰mm استفاده می‌کنند.

جالب است که این پاسخ تباهیده است زیرا که تنها ۶ متغیر از ۹ متغیر پایه ای غیر صفر هستند.

جدول ۴-۴: دینامیک حل مسئله

شماره الگو	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
تعداد الگوهای فعال	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	50
سایزها (mm)													
320	3	0	0	0	0	−1	0	0	0	2	0	0	0
340	0	3	0	0	0	0	−1	0	0	0	2	0	0
450	0	0	2	0	0	0	0	−1	0	1	1	0	3
500	0	0	0	2	0	0	0	0	−1	0	0	0	1
1200	−1	−1	−1	−1	3	0	0	0	0	−1	−1	2	0
1900	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	−1
1690	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1390	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1710	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

شماره الگو	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
تعدادالگوهای فعال	14	14	0	0	0	0	0	0	0	22	22	0	22
سایزها (mm)													
320	0	2	0	3	0	3	0	1	0	2	2	2	0
340	0	0	1	1	0	2	0	3	0	0	3	0	1
450	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
500	0	1	3	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2
1200	1	−1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1900	2	0	−1	−1	1	0	0	0	1	1	0	0	0
1690	0	0	0	0	1	−1	2	0	1	0	0	−1	0
1390	0	0	0	0	0	0	1	−1	1	1	0	0	−1
1710	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	−1	0	0

۴-۷ پیشنهاد و نتیجه گیری

گمان می‌رود مشابه روش تولید ستون، فرایند بهینه سازی و تولید سطر و ستون نیز به ماتریس ورودی اولیه بستگی داشته باشد، به گونه‌ای که بعضا با تغییرات جزئی در ماتریس پایه اولیه پاسخ بهتر و یا بدتر شود. پیشنهاد ما این است که از الگوریتم ژنتیک برای یافتن یک ماتریس پایه اولیه برای شروع روش ارائه شده در فصل سوم استفاده شود.

اگرچه در این پژوهش، تکنیکی برای CSP دو مرحله‌ای ارائه دادیم، می‌توان آن را در حالت کلی‌تر برای CSP های چند مرحله‌ای نیز تعمیم داد. فرایند برش چند مرحله‌ای چالش برانگیز است. مدل سازی مناسب از نتایج CSP چند مرحله ای در دو نوع مدل انجام می شود: یکی با یک مجموعه از اندازه های میانی داده شده و دیگر با اندازه های میانی نامعلوم. این مدل ها مکمل یکدیگرند و هر دو باید در بسته های نرم افزاری تجاری برای حل CSP چند مرحله ای اجرا شوند. نتایج کنونی به ویژه تکنیک تولید سطر و ستون برای حل موثر مدل های چند مرحله ای بسیار امیدوار کننده است. آزمایش های محاسباتی، اثر بخشی روش و کیفیت بالای پاسخ ها نشان می دهد.

فهرست منابع

[۱] بازارا، شرالی، و جارویس. برنامه ریزی خطی. ترجمه‌ی خرم، اسماعیل، ویراستار مستغنی یزدی، انسیه. نشر کتاب دانشگاهی، تهران، ویرایش پانزدهم، ۱۳۷۸.

[۲] قاسم، مصلحي، و رضايی، علیرضا. ارایه الگوریتمي براي مسئله برش دوبعدي با تقاضا. استقلال، ۲(۲۳):۵۷-۷۹، آبان ۱۳۸۳.

[3] Cui, Yaodong. A cutting stock problem and its solution in the manufacturing industry of large electric generators. *Computers & Operations Research*, 32(7):1709–1721, 2005.

[4] Alp, Seda, Ertek, Gurdal, and Birbil, S Ilker. Application of the cutting stock problem to a construction company: a case study. in *Proceedings of the 5th international symposium on intelligent manufacturing systems*, pp. 29–31, 2006.

[5] Morabito, Reinaldo and Garcia, Valdir. The cutting stock problem in a hardboard industry: A case study. *Computers & Operations Research*, 25(6):469–485, 1998.

[6] Dyckhoff, Harald. A typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*, 44(2):145–159, 1990.

[7] Hinxman, AI. The trim-loss and assortment problems: A survey. *European Journal of Operational Research*, 5(1):8–18, 1980.

[8] De Cani, Phillip. A note on the two-dimensional rectangular cutting-stock problem. *Journal of the Operational Research Society*, 29(7):703–706, 1978.

[9] Cheng, C.H. Feiring, B.R. Chengb T.C.E. Chengb. The cutting stock problem - a survey. *international journal of production economics*, 36(9):291–305, 1994.

[10] Haims, M.J. On the optimum two-dimensional allocation problem.

[۱۱] تقوی فرد، ، جوانشیر و اسلامی، دکترمحمد تقی. الگوریتمی کارا به منظور مدیریت سرمایه و هزینه در صنایع برش. دانشگاه آزاد اسلامی–واحد علوم و تحقیقات تهران، ۲۱(۹۳):۹۳-۱۰۴، آبان ۱۳۸۹.

[12] Gilmore, PC and Gomory, Ralph E. The theory and computation of knapsack functions. *Operations Research*, 14(6):1045–1074, 1966.

[13] Kantorovich, Leonid Vital′evich. Mathematical methods of organizing and planning production. *Management science*, 6(4):366–422, 1960.

[14] Gilmore, Paul C and Gomory, Ralph E. A linear programming approach to the cutting stock problem—part ii. *Operations research*, 11(6):863–888, 1963.

[15] Mobasher, Azadeh and Ekici, Ali. Solution approaches for the cutting stock problem with setup cost. *Computers & operations research*, 40(1):225–235, 2013.

[16] Gilmore, PC and Gomory, Ralph E. Multistage cutting stock problems of two and more dimensions. *Operations research*, 13(1):94–120, 1965.

[17] Gilmore, PC and Gomory, Ralph E. The theory and computation of knapsack functions. *Operations Research*, 14(6):1045–1074, 1966.

[18] Mitchell, Melanie. *An introduction to genetic algorithms*. MIT press, 1998.

[19] Mitchell, Melanie. Genetic algorithms: An overview. *Complexity*, 1(1):31–39, 1995.

[20] Gilmore, Paul C and Gomory, Ralph E. A linear programming approach to the cutting-stock problem. *Operations research*, 9(6):849–859, 1961.

[21] Winston, Wayne L and Goldberg, Jeffrey B. *Operations research: applications and algorithms*, vol. 3. Thomson Brooks/Cole Belmont, 2004.

[22] Gilmore, PC and Gomory, Ralph E. Multistage cutting stock problems of two and more dimensions. *Operations research*, 13(1):94–120, 1965.

[23] Zak, Eugene J. Modeling multistage cutting stock problems. *European journal of operational research*, 141(2):313–327, 2002.

[24] Gilmore, Paul C and Gomory, Ralph E. A linear programming approach to the cutting stock problem—part ii. *Operations research*, 11(6):863–888, 1963.

پیوست آ

برنامه $MATLAB$

در این پیوست به عنوان نمونه برنامه $MATLAB$ برای حل عددی مثال (۳-۲-۵) با استفاده از روش ارائه شده در فصل ۳، آمده است.

```
clear all
close all
clc

f=@(a)(-(1/4)*a(1)-(1/12)*a(2)-(1/8)*a(3));
A=[1200 340 500;0 340 500;0 -340 -500];
B=[4950 ;1850;-1150];
LB=zeros(3,1);

[x,fval]=ga(f,3,A,B,[],[],LB,[],[],[1 2 3] )
f_opt=-sym(fval)
```

```
function [sayy]= SAYY(xi,k,M)
syms t
N=2^(k-1);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%chebyshev
ayy=zeros(N*M,1);
for n=1:N
    nn=2^k*xi-2*n+1;
    for m=1:M
        if ((n-1)/N)<=xi && xi<(n/N)
           say_nm=2^(k/2)*subs(U(m),nn);
        else
           say_nm=0;
        end
```

```
        j=(n-1)*M+m;
        sayy(j)=vpa(say_nm,3);
    end
end
```

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

الگوریتم ژنتیک	Genetic Algorithm
الگوریتم سیمپلکس	Simplex Algorithm
برنامه ریزی خطی	Linear Programming
برش چند مرحله‌ای	Multistage Cutting
بهینه سازی	Optimization
تابع هدف	Objective Function
تباهیده	Degenerate
تولید ستون	Column Generation
تولید سطر و ستون	Row-and-column Generation
جواب شدنی	Feasible solution
سیمپلکس اصلاح شده	Revised Simplex
روش شاخه وکران	Branch-and-bound Procedure
رول اولیه	Stock Roll
رول پایانی	Intermediate Roll
رول میانی	Finished Roll
غیر خطی	Nonlinear
ماتریس پایه	Basic matrix
متغیرهای پایه	Basic Variables
محورگیری	Pivoiting
مساله دوگان	Dual Problem
مساله کوله پشتی	Knapsack Problem

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

ماتریس پایه . . . . Basic matrix
متغیرهای پایه . . . . Basic Variables
روش شاخه وکران . . . . Branch-and-bound Procedure
تولید ستون . . . . Column Generation
تباهیده . . . . Degenerate
مساله دوگان . . . . Dual Problem
جواب شدنی . . . . Feasible solution
رول میانی . . . . Finished Roll
الگوریتم ژنتیک . . . . Genetic Algorithm
رول پایانی . . . . Intermediate Roll
مساله کوله پشتی . . . . Knapsack Problem
برنامه ریزی خطی . . . . Linear Programming
برش چند مرحله‌ای . . . . Multistage Cutting
غیر خطی . . . . Nonlinear
تابع هدف . . . . Objective Function
بهینه سازی . . . . Optimization
محورگیری . . . . Pivoting
سیمپلکس اصلاح شده . . . . Revised Simplex
تولید سطر و ستون . . . . Row-and-column Generation
الگوریتم سیمپلکس . . . . Simplex Algorithm
رول اولیه . . . . Stock Roll

Hakim Sabzevari University

An Outline of MSc. Thesis

Surname:Heydari	Name:Atefe	Student No.:9213133111
Supervisor: Dr. M.T. Khodadad		
Advisor: Dr. A. Gholizadeh		
Faculty of Mathematics and Computer Science	Applied Mathematics	Operational Research
Title of thesis: Numerical solution of fractional integro-differential and volterra integral equations with singular kernel by Legendre wavelets and SCW methods		
Keywords: Second Chebyshev wavelets, Legendre wavelets, Integro-differential equations, Integral equations		

Abstract: In multistage cutting stock problems (CSP) the cutting process is distributed over several successive stages. Every stage except the last one produces intermediate products. The list of intermediate products may be given or arbitrary. The goal is to minimize the total amount of material taken out of stock to cut finished products sufficient to meet customer demands. If the intermediate sizes are given, the column generation technique can be applied to multistage cutting problems. If the intermediate sizes are not given then another dimension is added to the problem complexity. We propose a special procedure for this case that dynamically generates both rows (intermediate sizes) and columns (patterns). We refer to this method as row-and-column generation. The method uses an auxiliary problem embedded into the frame of the revised simplex algorithm. It is a non-linear knapsack problem that can be solved efficiently. In contrast to the column generation method the developed technique cannot guarantee the optimal solution. However, the results of computational experiments are very promising and prove that the method is a valuable addition to the set of tools for modeling and solving multistage CSPs.

Hakim Sabzevari University
Faculty of Mathematics and Computer Science

A Thesis Submitted in Partial Fulfilment of the Requirement for the Degree of Master of Science in Applied Mathematics

Numerical solution of fractional integro-differential and volterra integral equations with singular kernel by Legendre wavelets and SCW methods

Supervisor:
Dr. M.T. Khodadad

Advisor:
Dr. A. Gholizadeh

By:
Atefe Heydari

January 2016