

بسم الله الرحمن الرحيم



دانشگاه حکیم بسزوری

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض  
گرایش آنالیز

# بازیابی اطلاعات از دست رفته و بازنوسازی تصویر با استفاده از موجک قاب ها

استاد راهنما

دکتر علی اکبر عارفی جمال

استاد مشاور

دکتر محمود امین طوسی

پژوهشگر:

عبدالرشید زاهدی

بهمن ۱۳۹۴



دانشگاه حکیم سبزواری

بسمه تعالی

فرم ۱۱۳-ت

فرم ارزشیابی و صورتجلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد\*

جلسه دفاع از پایان نامه آقای عبدالرشید زاهدی دانشجوی رشته ریاضی محض گرایش آنالیز به شماره دانشجویی ۹۲۱۳۱۲۲۰۹۰ با عنوان «بازیابی اطلاعات از دست رفته و بازسازی تصویر با استفاده از موجک قاب ها» در مورخه ۱۳۹۴/۱۱/۲۶ در دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر تشکیل و توسط هیات داوران مورد ارزشیابی قرار گرفت و نمره ۱۹/۱ برابر درجه عالی برای آن تعیین گردید. به این ترتیب از این تاریخ آقای عبدالرشید زاهدی به عنوان کارشناس ارشد در رشته مذکور شناخته می شود.

مورد ارزشیابی	موارد	حداکثر نمره	نمره کسب شده
۱- کیفیت نگارش	رعایت اصول نگارش انسجام در تنظیم بخشهای مختلف، کیفیت تصاویر، جداول و اشکال، تنظیم فهرست ها، منابع و ماخذ	۴	۳/۵
۲- کیفیت علمی	بررسی تاریخچه و سابقه تجربی و نظری موضوع انسجام منطقی در بخش های مختلف پایان نامه، ابتکار و نوآوری اهمیت و ارزش علمی پایان نامه، استفاده از منابع معتبر و جدید، کیفیت تجزیه و تحلیل یافته ها و نتیجه گیری، روشن بودن روش کار، هدف ها و فرضیه های تحقیق، جدید بودن روش تحقیق	۱۰	۱۰
۳- کیفیت ارائه در جلسه دفاع	تسلط بر موضوع و بیان واضح و تفهیم آن، توانایی در پاسخگویی به سوالات مطرح شده در جلسه، رعایت زمان ارائه و روش ارائه	۴	۳/۵
۴- ارزشیابی گزارشات	گزارش های دوره ای پیشرفت کار (حداقل ۴ مورد)	۱	۱
۵- خروجی پایان نامه	مقاله مستخرج از پایان نامه: این نمره به صورت زیر اختصاص می یابد (۱) چکیده کنفرانسی هر مورد ۲۵/۰ نمره تا سقف ۵/۰ نمره (۲) مقاله کامل در مجموع مقالات همایشهای معتبر یا مقاله در مجلات علمی-ترویجی معتبر پذیرفته شده یا چاپ شده هر مورد ۵/۰ نمره تا سقف ۱ نمره (۳) مقاله پذیرفته شده یا چاپ شده در مجلات علمی پژوهشی معتبر ۱ نمره (۴) مقاله ارسال شده به مجلات علمی پژوهشی معتبر هر مورد ۲۵/۰ نمره تا سقف ۵/۰ نمره (۵) دستگاه ساخته شده دارای گواهی ثبت اختراع یا به سفارش سازمان ها تا سقف ۱ نمره (۶) دستگاه ساخته شده کاربردی که به تایید رئیس دانشکده رسیده باشد تا سقف ۵/۰ نمره	۱	۰/۵
جمع			۱۹

درجه معادل کسب شده: (از ۱۹ تا ۲۰ عالی)  از ۱۸ تا ۱۸/۹۹ بسیار خوب  از ۱۶ تا ۱۷/۹۹ خوب  از ۱۴ تا ۱۵/۹۹ قابل قبول  کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

مشخصات هیات داوران

ردیف	نام و نام خانوادگی	سمت	مرتبه علمی	محل کار	امضاء
۱	دکتر علی اکبر عارفی جمال	استاد راهنما	دانشیار	دانشگاه حکیم سبزواری	
۲	دکتر محمود امین طوسی	استاد مشاور	استادیار	دانشگاه حکیم سبزواری	
۳	دکتر قدیر صادقی	استاد داور	دانشیار	دانشگاه حکیم سبزواری	
۴	دکتر محمد بلبلیان	نماینده تحصیلات تکمیلی	استادیار	دانشگاه حکیم سبزواری	

امضاء  
رئیس دانشکده

امضاء  
مدیر گروه

\* این فرم الزاما باید به صورت تایپ شده تهیه، ارسال و در پایان نامه درج شود



## سوگند نامه دانش آموختگان دانشگاه حکیم سبزواری

به نام خداوند جان و خرد      کزین برتر اندیشه بر نگذرد

اینک که به خواست آفریدگار پاک، کوشش خویش و بهره گیری از دانش استادان و سرمایه های مادی و معنوی این مرز و بوم، توشه ای از دانش و خرد گردآورده ام، در پیشگاه خداوند بزرگ سوگند یاد می کنم که در به کارگیری دانش خویش، همواره بر راه راست و درست گام بردارم. خداوند بزرگ، شما شاهدان، دانشجویان و دیگر حاضران را به عنوان داورانی امین گواه می گیرم که از همه دانش و توان خود برای گسترش مرزهای دانش بهره گیرم و از هیچ کوششی برای تبدیل جهان به جایی بهتر برای زیستن، دریغ نورزم. پیمان می بندم که همواره کرامت انسانی را در نظر داشته باشم و ممنوعان خود را در هر زمان و مکان تا سر حد امکان یاری دهم. سوگند می خورم که در به کارگیری دانش خویش به کاری که باراه و رسم انسانی، آیین پرهیزگاری، شرافت و اصول اخلاقی برخاسته از ادیان بزرگ الهی، به ویژه دین مبین اسلام، مباینت دارد دست نیازم. همچنین در سایه اصول جهان شمول انسانی و اسلامی، پیمان می بندم از هیچ کوششی برای آبادانی و سرافرازی میهن و هم میهنانم فروگذاری نکنم و خداوند بزرگ را به یاری طلبم تا همواره در پیشگاه او و در برابر وجدان بیدار خویش و ملت سرافراز، بر این پیمان تا ابد استوار بمانم.

نام و نام خانوادگی: عبدالرشید زاهدی

تاریخ و امضا:

## تأییدی صحت و اصالت نتایج

باسمه تعالی

اینجانب عبدالرشید زاهدی به شماره دانشجویی ۹۲۱۳۱۲۲۰۹۰ دانشجوی رشته ریاضی محض مقطع تحصیلی کارشناسی ارشد تأیید می‌نمایم که کلیه نتایج این پایان‌نامه حاصل کار اینجانب و بدون هرگونه دخل و تصرف است و موارد نسخه برداری شده از آثار دیگران را با ذکر کامل مشخصات منبع ذکر کرده‌ام. در صورت اثبات خلاف مندرجات فوق، به تشخیص دانشگاه مطابق با ضوابط و مقررات حاکم (قانون حمایت از حقوق مؤلفان و مصنفان و قانون ترجمه و تکثیر کتب و نشریات و آثار صوتی، ضوابط و مقررات آموزشی، پژوهشی و انضباطی ... ) با اینجانب رفتار خواهد شد و حق هرگونه اعتراض در خصوص احقاق حقوق مکتسب و تشخیص و تعیین تخلف و مجازات را از خویش سلب می‌نمایم. در ضمن، مسئولیت هرگونه پاسخگویی به اشخاص اعم از حقیقی و حقوقی و مراجع ذی صلاح (اعم از اداری و قضایی) به عهده ی اینجانب خواهد بود و دانشگاه هیچ گونه مسئولیتی در این خصوص نخواهد داشت.

نام و نام خانوادگی: عبدالرشید زاهدی

تاریخ و امضا:

## مجوز بهره برداری از پایان نامه

بهره برداری از این پایان نامه در چهارچوب مقررات کتابخانه و با توجه به محدودیتی که توسط استاد راهنما

به شرح زیر تعیین می شود، بلامانع است:

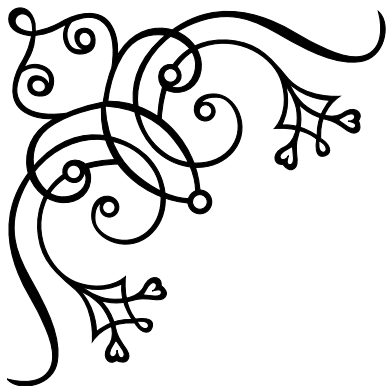
بهره برداری از این پایان نامه برای همگان بلامانع است.

بهره برداری از این پایان نامه با اخذ مجوز از استاد راهنما، بلامانع است.

بهره برداری از این پایان نامه تا تاریخ ..... ممنوع است.

استاد راهنما: دکتر علی اکبر عارفی جمال

تاریخ و امضا:



تقدیم به:

## پدر و مادرم



سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی کران خود، آدمی را زیور عقل آراست. در آغاز وظیفه خود می دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر علی اکبر عارفی جمال، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی رسید. از جناب آقای دکتر محمود امین طوسی که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم. همچنین لازم می دانم از گروه پارسی لاتک در پاسخگویی به مشکلات کاربران کمال قدردانی را داشته باشم. در پایان، بوسه می زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می کنم وجود مقدس شان را و تشکر می کنم از خانواده عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که بهترین پشتیبان من بودند.

عبدالرشید زاهدی

بهمن ۱۳۹۴

# فهرست مطالب

ب	فهرست جداول
ج	فهرست تصاویر
۱	چکیده
۲	پیش‌گفتار
۴	فصل ۱: مقدمه و پیش‌نیازها
۴	۱-۱ معرفی قاب‌ها
۷	۲-۱ دوگان قاب
۱۲	۳-۱ تبدیل فوریه
۱۵	۴-۱ مفاهیم اولیه تصویر
۱۸	فصل ۲: موجک قاب‌های چسبان
۱۸	۱-۲ آنالیز چند ریزگی برای موجک‌های متعامد
۲۵	۲-۲ آنالیز چند ریزگی برای زیر فضاهای تحت انتقال پایا
۲۹	۳-۲ ساخت موجک قاب چسبان با استفاده از آنالیز چند ریزگی
۲۹	۱-۳-۲ موجک قاب‌های چسبان برای $L^2(\mathbb{R})$
۳۰	۲-۳-۲ ساخت موجک قاب چسبان
۳۱	۳-۳-۲ اصل توسیع یکانی
۴۱	فصل ۳: بانک صافی و بازیابی اطلاعات
۴۲	۱-۳ بانک صافی
۴۳	۱-۱-۳ نمایش صافی‌ها در دامنه زمانی

- ۴۵ . . . . . صافی ها در دامنه فرکانسی ۲-۱-۳
- ۴۶ . . . . . صافی های بالا گذر و پایین گذر ۳-۱-۳
- ۴۷ . . . . . قاب چسبان *B*-اسپلین ۴-۱-۳
- ۴۹ . . . . . قاب های چسبان و بانک صافی UHF ۲-۳
- ۵۴ . . . . . روش کار و الگوریتم های حذف نویز ۳-۳
- ۵۵ . . . . . الگوریتم کار به روش موجک قاب ها ۱-۳-۳

۶۲ فهرست منابع

۶۴ پیوست آ: الگوریتم ها

۶۵ پیوست ب: کد ها

۶۶ واژه نامه فارسی به انگلیسی

۶۸ واژه نامه انگلیسی به فارسی



## فهرست جداول

۵۸ . . . . .	۱-۳ نمایش نتایج در $SNR = ۱۰$
۵۹ . . . . .	۲-۳ نمایش نتایج در $SNR = ۲۰$
۶۰ . . . . .	۳-۳ مقدار خطا در $SNR = ۱۰$
۶۰ . . . . .	۴-۳ مقدار خطا در $SNR = ۲۰$

# فهرست تصاویر

۱۵	۱-۱	پیکسل
۱۶	۲-۱	تصویر سطح خاکستری
۱۷	۳-۱	تصویر رنگی
۴۷	۱-۳	$B$ -اسپلاین
۴۸	۲-۳	اسپلاین نظریف پذیر و موجک های متناظر آن
۵۶	۳-۳	حذف نویز با استفاده از قاب چسبان
۶۱	۴-۳	نمودار خطا در $SNR = 10$
۶۱	۵-۳	نمودار خطا در $SNR = 20$



دانشگاه سیستان و بلوچستان

## فرم چکیده ی پایان نامه ی دوره ی تحصیلات تکمیلی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

نام خانوادگی دانشجو: زاهدی	نام: عبدالرشید	ش. دانشجویی: ۹۲۱۳۱۲۲۰۹۰
استاد راهنما: دکتر علی اکبر عارفی جمال		
استاد مشاور: دکتر محمود امین طوسی		
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر	رشته: ریاضی محض	گرایش: آنالیز
مقطع: کارشناسی ارشد	تاریخ دفاع: بهمن ۱۳۹۴	تعداد صفحات: ۷۰
عنوان پایان نامه: بازیابی اطلاعات از دست رفته و بازسازی تصویر با استفاده از موجک قاب ها		
کلید واژه ها: موجک قاب، قاب چسبان، تخمین خطا		
<p>چکیده: در این پایان نامه برای بهبود قاب ها نظریه جامعی ارائه می شود که به وسیله آن می توان فیلتر های موجود را برای ساخت قاب های پارسوال جدید تقویت کرد. سپس متناسب با ویژگی های خاص این فیلتر قاب ها، یک الگوریتم حذف نویز تصویر بیان می شود. همچنین کارایی و عملکرد الگوریتم ارائه شده را روی مجموعه متنوعی از تصاویر با نتایج بسیار قابل تامل نشان می دهیم. سرانجام به منظور نمایش مزیت الگوریتم بیان شده، نتایج را با روش های شناخته شده ای نظیر روش میانه و موجک مقایسه می کنیم.</p>		

## پیش‌گفتار

سابقه نظریه موجک‌ها حداقل به سال ۱۹۱۰ برمی‌گردد که اولین بار توسط هار<sup>۱</sup> مطرح شد ولی از سال ۱۹۸۵ ریاضی‌دانان زیادی آنالیز موجک‌ها را مورد توجه قرار داده‌اند. کاربرد موجک‌ها آنقدر راضی‌کننده بود که به سرعت توجه مهندسين و افراد با تخصص‌های گوناگون را برای حل مسائل مختلف با استفاده از این نظریه جلب کرد. بازیابی اطلاعات از دست رفته از نمونه‌های جزئی آن یک مشکل اساسی در ریاضیات است و طیف گسترده‌ای از کاربردها را در پردازش تصویر و سیگنال دارد. در این پایان‌نامه به بررسی بازیابی اطلاعات از دست رفته توسط موجک‌هایی خاص می‌پردازیم.

از سال ۱۹۶۴ تاکنون، موضوع پردازش تصویر، رشد فراوانی کرده است. علاوه بر برنامه تحقیقات فضایی، اکنون از فنون پردازش تصویر، در موارد متعددی استفاده می‌شود. گرچه اغلب این مسائل با هم نامرتبط هستند، اما عموماً نیازمند روش‌هایی هستند که قادر به ارتقای اطلاعات تصویری برای تعبیر و تحلیل انسان باشد. برای نمونه در پزشکی با شیوه‌های رایانه‌ای تباین تصویر را ارتقا می‌دهند. متخصصان جغرافیایی نیز از این روش‌ها یا روش‌های مشابه برای مطالعه الگوهای آلودگی هوا که با تصویر برداری هوایی و ماهواره‌ای بدست آمده است، استفاده می‌کنند. در باستان‌شناسی نیز روش‌های پردازش تصویر برای بازیابی عکس‌های مات شده‌ای که تنها باقی‌مانده آثار هنری نادر هستند، مورد استفاده قرار می‌گیرد. در فیزیک و زمینه‌های مرتبط، فنون رایانه‌ای بارها تصاویر آزمایش‌های مربوط به موضوعاتی نظیر پلاسماهای پرانرژی و تصاویر ریزبینی الکترونی را ارتقا داده‌اند. کاربردهای موفق دیگری از پردازش تصویر را نیز می‌توان در نجوم، زیست‌شناسی، پزشکی هسته‌ای و صنعت بیان کرد.

سرآمد افرادی که موجک‌ها را به صورت کاربردی در دهه ۹۰ مطالعه کرد دوبیشی<sup>۲</sup> بود که موجک‌های زیادی را معرفی نمود. هم‌چنین در سال ۱۹۹۵ ونگ<sup>۳</sup> شکل کلی موجک‌های  $MRA$ <sup>۴</sup> که نوع خاصی از موجک‌ها است را بدست آورد. در سال ۱۹۹۸، بندتو<sup>۵</sup> نشان داد که چگونه صافی‌های زیادی موجک‌های  $MRA$  را تولید می‌کنند. در سال ۲۰۰۱ نشان داده شد که موجک‌قاب‌های چسبانی که از یک  $MRA$  به دست

---

Haar<sup>۱</sup> Daubechies<sup>۲</sup> Wang<sup>۳</sup> MultiResolution Analysis<sup>۴</sup> Benedetto<sup>۵</sup>

می آیند دقیقاً توابعی مانند  $\psi$  هستند که از صافی های تعمیم یافته پائین گذر حاصل می شوند. هدف این پایان نامه بررسی ساختار موجک قاب های چسبان  $MRA$  و سپس حذف نویز تصویر با استفاده از نرم افزار متلب است. این پایان نامه شامل سه فصل است که در فصل اول ابتدا به مقدماتی از قاب ها و قاب های دوگان می پردازیم و سپس تبدیل فوریه و برخی از قضایای آن را بیان می کنیم. در بخش پایانی این فصل نیز به بیان مفاهیم اولیه تصویر و چگونگی ساختار یک تصویر در نرم افزار متلب خواهیم پرداخت. فصل دوم با معرفی موجک ها آغاز می گردد، سپس به بیان آنالیز چند ریزگی پرداخته و مفاهیمی مربوط به آن را تعریف می کنیم. در بخش دوم به معرفی موجک های  $MRA$  برای زیر فضاها تحت انتقال پایا می پردازیم و قضایای مربوط به آن را بیان می کنیم و در بخش بعد موجک قاب های چسبان برای  $L^2(\mathbb{R})$  را معرفی کرده و در آخرین بخش این فصل به ساخت موجک قاب چسبان با استفاده از آنالیز چند ریزگی می پردازیم. در فصل سوم ابتدا صافی ها را در دامنه زمانی و فرکانسی تعریف می کنیم، همچنین صافی های بالا گذر و پایین گذر را معرفی کرده و در بخش بعد یک بانک صافی از قاب چسبان به دست می آوریم. در قسمت پایانی نیز با استفاده از بانک صافی به دست آمده از قاب چسبان به حذف نویز تصویر می پردازیم و خروجی این روش را نشان می دهیم و در انتها نتایج خروجی را با نتایج استفاده شده در روش های  $Wavelet$  و  $Median$  برای چندین تصویر و با شدت نویزهای مختلف نمایش می دهیم.

این پایان نامه برگرفته از مقالات زیر است

- [1] J.-F.Cai, R. Chan, L. Shen, Z.Shen, A framelet-based image inpainting algorithm, Appl. Comput. Harmon. Anal.24(2007) 131-149.
- [2] J.-F.Cai, R. Chan, L. Shen, Z.Shen, Restoration of chopped and nodded images by framelets, SIAM J. Sci. Comput. 30 (2008) 1205-1227.
- [3] J.-F.Cai, R. Chan, L. Shen, Z.Shen, Simultaneously inpainting in image and transformed domains, Numer. Math. 112 (2009) 509–533.
- [4] L. Shen, M. Papadakis, I. A. Kakadiaris, D. Kouri, D. K. Hoffman, Image denoising using a tight frame, IEEE Trans. Image Process. 9(2000) 1522-1531.

# فصل ۱

## مقدمه و پیشنایزها

در این فصل به بررسی مفهوم قاب در فضای هیلبرت می پردازیم. قاب ها را می توان حالت عمومی تری از پایه ریس و پایه متعامد یکه در نظر گرفت. به ویژه هر پایه ریس و پایه متعامد یکه قاب هستند. در بخش اول عملگر قاب را معرفی می کنیم سپس تجزیه قاب را از طریق دوگان کانونی بررسی کرده و در ادامه شرایط قاب بودن و خواص قاب دوگان را بررسی می کنیم.

### ۱-۱ معرفی قاب ها

در این بخش به معرفی قاب ها در فضاهای هیلبرت  $\mathcal{H}$  و برخی از ویژگی های آن ها می پردازیم. در سرتاسر این فصل  $\mathcal{H}$  معرف یک فضای هیلبرت جدایی پذیر است.

**تعریف ۱-۱-۱.** فرض کنید  $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  یک عملگر کراندار و دوسویی باشد، تصویر هر پایه متعامد یکه تحت  $U$  را یک پایه ریس<sup>۱</sup> برای فضای هیلبرت  $\mathcal{H}$  می نامیم.

دنباله  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  در فضای هیلبرت  $\mathcal{H}$  کامل<sup>۲</sup> نامیده می شود هرگاه  $\overline{\text{span}\{f_k\}_{k=1}^{\infty}} = \mathcal{H}$  می توان نشان داد  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  در  $\mathcal{H}$  کامل است اگر و تنها اگر برای هر  $k \in \mathbb{N}$ ،  $\langle f, f_k \rangle = 0$  آن گاه  $f = 0$  [۱].

**تعریف ۱-۱-۲.** دنباله  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  در فضای هیلبرت  $\mathcal{H}$  یک قاب برای  $\mathcal{H}$  است، اگر مقادیر ثابت و مثبت  $A$  و  $B$  موجود باشند به طوری که

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H}. \quad (1-1)$$

<sup>۱</sup>Riesz basis

<sup>۲</sup>Complete

در این تعریف  $A$  و  $B$  به ترتیب کران های پایین و بالای قاب نام دارند، ثابت های  $A$  و  $B$  یکتا نیستند. مثلاً اگر  $B$  يك کران بالای قاب باشد هر عدد حقیقی بزرگتر از  $B$  می تواند يك کران بالای قاب باشد. سوپریمم همه ی کران های پایین قاب نیز يك کران پایین است و کران پایین بهینه نام دارد. اینفیمم تمام کران های بالا هم يك کران بالا است که کران بالای بهینه نام دارد. اگر در تعریف بالا  $A = B$ ، آنگاه قاب را چسبان<sup>۱</sup> می نامیم. در حالتی که  $A = B = 1$  قاب را چسبان نرمال<sup>۲</sup> می نامیم.

دنباله  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{H}$  را دنباله بسل<sup>۳</sup> گوئیم هرگاه حداقل نامساوی دوم قاب برقرار باشد و  $B$  را کران بسل برای  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  می گوئیم. فرض کنید  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  یک دنباله در فضای هیلبرت  $\mathcal{H}$  باشد،  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  را یک دنباله قاب<sup>۴</sup> نامیم هرگاه  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  یک قاب برای  $\overline{\text{span}}\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  باشد. دو دنباله  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  و  $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$  را هم متعامد<sup>۵</sup> نامیده می شوند هر گاه برای هر  $i, j \in \mathbb{N}$  داشته باشیم

$$\langle f_i, g_j \rangle = \delta_{ij}.$$

**تعریف ۱-۱-۳.** اگر  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  یک قاب برای  $\mathcal{H}$  باشد و با حذف یک عضو دلخواه از آن، دنباله ی حاصل هم چنان یک قاب در  $\mathcal{H}$  باشد، چنین قابی را قاب اضافی<sup>۶</sup> می نامیم و اگر با حذف یک عضو دلخواه از یک قاب، دنباله ی باقی مانده قاب نباشد، چنین قابی را یک قاب دقیق<sup>۷</sup> می نامیم.

در ادامه برخی از ویژگی های مفید قاب ها را معرفی می کنیم. برای اثبات حکم زیر قضیه ۵.۴.۱ از مرجع [۱] را ببینید.

**قضیه ۱-۱-۴.** دنباله  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  در  $\mathcal{H}$  یک قاب است اگر و تنها اگر

$$\ell^2 \longrightarrow \mathcal{H}; \quad \{c_k\} \longrightarrow \sum_k c_k f_k$$

نگاشتی خوشتعریف از  $\ell^2$  بروی  $\mathcal{H}$  باشد.

**تعریف ۱-۱-۵.** قاب های  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  و  $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$  روی فضاها ی هیلبرت  $\mathcal{H}$  و  $\mathcal{K}$  را معادل گوئیم هرگاه عملگر وارون پذیر و کران داری چون  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$  موجود باشد به طوری که برای هر  $k \in \mathbb{N}$ ،  $T f_k = g_k$ .

**قضیه ۱-۱-۶.** فرض کنیم  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  یک قاب برای فضای هیلبرت  $\mathcal{H}$  با کران های  $A$  و  $B$  باشد و  $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  عملگری کران دار و پوشا باشد، آنگاه  $\{U f_k\}_{k=1}^{\infty}$  یک قاب برای  $\mathcal{H}$  با کران های  $A \|U\|^2$  و  $B \|U^\dagger\|^{-2}$  می باشد

<sup>۱</sup>Tight frame      <sup>۲</sup>Parseval frame      <sup>۳</sup>Bessel sequence      <sup>۴</sup>Frame sequence      <sup>۵</sup>Biorthonormal  
<sup>۶</sup>Overcomplete      <sup>۷</sup>Exact

که  $U^\dagger: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  نگاشت شبه وارون<sup>۱</sup> نظیر  $U$  است و

$$UU^\dagger x = x, \quad \forall x \in R_U$$

که در آن  $R_U$  برد<sup>۲</sup> عملگر  $U$  است.

□

برهان. نتیجه ۵.۳.۲ از مرجع [۱] را ببینید.

اگر  $\{f_k\}_{k=1}^\infty$  یک دنباله بسط در فضای هیلبرت  $\mathcal{H}$  باشد عملگر  $T$  با ضابطه

$$T: \ell^2 \rightarrow \mathcal{H}, \quad T\{c_k\}_{k=1}^\infty = \sum_{k=1}^\infty c_k f_k$$

را عملگر پیش قاب<sup>۳</sup> می نامیم. عملگر الحاقی  $T$  را به صورت

$$T^*: \mathcal{H} \rightarrow \ell^2, \quad T^*(f) = \{\langle f, f_k \rangle\}_{k=1}^\infty$$

نمایش می دهیم و عملگر تجزیه<sup>۴</sup> می نامیم. هم چنین عملگر

$$S: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad Sf = TT^*f = \sum_{k=1}^\infty \langle f, f_k \rangle f_k$$

را عملگر قاب<sup>۵</sup> می نامیم. عملگر  $S$  خوشتعریف است زیرا  $\{f_k\}_{k=1}^\infty$  یک دنباله بسط است. هم چنین

$$\langle Sf, f \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^\infty \langle f, f_k \rangle f_k, f \right\rangle = \sum_{k=1}^\infty \langle f, f_k \rangle \langle f_k, f \rangle = \sum_{k=1}^\infty |\langle f, f_k \rangle|^2$$

در این صورت (۱-۱) به فرم زیر نوشته می شود

$$A\|f\|^2 \leq \langle Sf, f \rangle \leq B\|f\|^2$$

واضح است که عملگر قاب کران دار و خود الحاق است، پس

$$AI \leq S \leq BI$$

<sup>۱</sup>Pseudo inverse

<sup>۲</sup>Range

<sup>۳</sup>Pre-frame operator

<sup>۴</sup>Analysis operator

<sup>۵</sup>Frame operator



که در آن  $\leq$  یک ترتیب جزئی روی عملگرهای خودالحاق است. بنابراین  $S$  مثبت و از پایین کران دار است و به طور معادل یک به یک و بردش بسته است. در لم بعدی خواهیم دید که  $S$  هم چنین معکوس پذیر است. فرض کنید  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  یک قاب و  $T$  عملگری کران دار و وارون پذیر روی  $\mathcal{H}$  باشد. بنا به قضیه (۱-۱-۶) دنباله  $\{Tf_k\}_{k=1}^{\infty}$  یک قاب است و بنا به تعریف (۱-۱-۵) با قاب  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  معادل است. هم چنین هر قاب  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  با یک قاب چسبان نرمال معادل است، در حقیقت قاب  $\{S^{-\frac{1}{2}}f_k\}_{k=1}^{\infty}$  با  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  معادل است که در آن  $S^{-\frac{1}{2}}$  ریشه دوم مثبت  $S^{-1}$  است.

**قضیه ۱-۱-۷.** فرض  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  یک قاب روی  $\mathcal{H}$  با کران های بهینه  $A$  و  $B$  و نیز  $S$  عملگر قاب وابسته به آن باشد، آن گاه گزاره های زیر برقرارند:

$$(۱) \text{ عملگر } S \text{ مثبت، وارون پذیر، کران دار و خودالحاق است و } B^{-1}I \leq S^{-1} \leq A^{-1}I.$$

$$(۲) \{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ یک قاب با کران های بهینه } A^{-1} \text{ و } B^{-1} \text{ است و } S^{-1} \text{ عملگر قاب نظیر } \{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ است.}$$

□

برهان. برای اثبات نتیجه ۲.۱.۴ از مرجع [۳] را ببینید.

## ۲-۱ دوگان قاب

یکی از مهم ترین خواص قاب ها خاصیتی موسوم به خاصیت بازسازی<sup>۱</sup> است. فرض کنیم  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  یک قاب با عملگر قاب  $S$  باشد، آنگاه

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1}f_k \rangle f_k, \quad \forall f \in \mathcal{H}. \quad (۲-۱)$$

سری اخیر به صورت نامشروط همگراست. در قضیه ۱-۱-۷ قبل دیدیم که  $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$  یک قاب است و با  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  معادل است، آن را دوگان کانونی<sup>۲</sup> قاب  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  می نامیم.

یکی از اهداف اصلی نظریه قاب ها یافتن ضرایب مناسبی به جای ضرایب  $\{\langle f, S^{-1}f_k \rangle\}_{k=1}^{\infty}$  در رابطه ی (۲-۱) است. پاسخ این مبحث، یافتن دوگان هایی برای یک قاب است. در این مبحث ضمن معرفی دوگان یک قاب به همراه مثال هایی شرایط وجود آن ها را نیز بررسی می کنیم.

<sup>۱</sup>Reconstruction

<sup>۲</sup>Canonical dual

**تعریف ۱-۲-۱.** فرض کنید  $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$  و  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  دو دنباله بسل برای فضای هیلبرت  $\mathcal{H}$  باشند به طوری که برای هر  $f \in \mathcal{H}$  داشته باشیم

$$f = \sum_k \langle f, g_k \rangle f_k, \quad (3-1)$$

آن گاه  $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$  را دوگان  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  می نامیم.

دوگان دارای خاصیت تقارنی است یعنی اگر  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  دوگان  $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$  باشد، نیز دوگان  $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$  است. قاب  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  حداقل یک دوگان کانونی به صورت  $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$  دارد اما در حالت کلی می تواند بیش از یک دوگان داشته باشد. چنین دوگان هایی را دوگان غیر کانونی (جایگزین<sup>۱</sup>) می نامند. فرمول (۳-۱) که فرمول باز سازی نیز خوانده می شود، یکی از مهم ترین ابزارها در کاربرد قاب ها است. متأسفانه در حالت دوگان کانونی با معکوس یک عملگر کران دار روی یک فضای هیلبرت عموماً نامتناهی البعد مواجه هستیم که این معکوس به آسانی به دست نمی آید. از طرف دیگر، هیچ تضمینی وجود ندارد که ویژگی های خاصی از قاب  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  به دوگان کانونی  $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$  نیز منتقل گردد [۴]. لم ۵.۱.۶ از مرجع [۱] نشان می دهد که هر قاب اضافی دارای دوگانی به جز دوگان کانونی است.

**لم ۲-۲-۱.** فرض کنیم  $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$  و  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  دنباله های بسل در  $\mathcal{H}$  باشند، عبارات زیر با یکدیگر معادل اند:

$$h = \sum \langle h, g_k \rangle f_k, \quad \forall h \in \mathcal{H} \quad (۱)$$

$$h = \sum \langle h, f_k \rangle g_k, \quad \forall h \in \mathcal{H} \quad (۲)$$

$$\|h\|^2 = \sum \langle h, f_k \rangle \langle g_k, h \rangle, \quad \forall h \in \mathcal{H} \quad (۳)$$

$$\langle h, k \rangle = \sum \langle h, f_k \rangle \langle g_k, k \rangle, \quad \forall h, k \in \mathcal{H} \quad (۴)$$

در صورتی که هر یک از شرایط بالا برقرار باشند، همه سری های بالا به طور نامشروط همگرا هستند و قاب های  $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$  و  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  دوگان یکدیگرند.

□

برهان. برای اثبات لم ۴.۲۴ از مرجع [۶] را ببینید.

فرض بسل بودن دنباله های ذکر شده در لم قبل ضروری است زیرا دنباله غیر بسل  $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$  وجود دارد که تساوی (۳-۱) برای آن برقرار باشد [۶]. دوگان کانونی قاب  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  تحت عملگر  $S^{-1}$  با  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  معادل است. جالب است که این دوگان، تنها دوگانی است که در بین همه دوگان ها، با  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  معادل است [۷].

<sup>۱</sup>Alternate

گزاره ۱-۲-۳. فرض کنید  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  یک قاب در  $\mathcal{H}$  و  $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$  دوگان آن باشد. اگر  $U \in B(\mathcal{H})$  یک عملگر وارون پذیر و کران دار باشد به گونه ای که  $\{Ug_k\}_{k=1}^{\infty}$  نیز دوگان  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  باشد، آن گاه لزوماً  $U = I$ .

برهان. مرجع [۷] را ببینید.  $\square$

گزاره بالا بیان می کند که دوگان های متمایز، هیچگاه با هم معادل نیستند. در ادامه به بررسی برخی از رفتارهای دوگان های کانونی می پردازیم. حکم زیر اولین گزاره مرجع [۸] است که با اثبات ساده تر و جدیدی بازگو می شود.

گزاره ۱-۲-۴. فرض کنید  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  یک قاب برای  $\mathcal{H}$  و  $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$  قاب دوگان آن باشد، آن گاه  $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$  دوگان کانونی است اگر و تنها اگر

$$\langle f_k, g_j \rangle = \langle g_k, f_j \rangle, \quad \forall k, j \in \mathbb{N}. \quad (4-1)$$

برهان. فرض کنیم  $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$  دوگان کانونی بوده و  $g_k = S^{-1}f_k$ ، آن گاه  $f_k = Sg_k$ ، چون  $S$  خودالحاق است، بنابراین

$$\langle f_k, g_j \rangle = \langle Sg_k, g_j \rangle = \langle g_k, Sg_j \rangle = \langle g_k, f_j \rangle. \quad (5-1)$$

از طرفی دیگر اگر تساوی (۴-۱) برقرار باشد، از آنجا که  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  قاب دوگانی برای  $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$  است، آن گاه برای هر  $x \in \mathcal{H}$  و  $k \in \mathbb{N}$  داریم

$$\begin{aligned} \langle x, f_k \rangle &= \sum_j \langle x, f_j \rangle \langle g_j, f_k \rangle \\ &= \sum_j \langle x, f_j \rangle \langle f_j, g_k \rangle \\ &= \langle Sx, g_k \rangle = \langle x, Sg_k \rangle. \end{aligned}$$

بنابراین  $f_k = Sg_k$  پس برای هر  $k \in \mathbb{N}$  نتیجه می شود که  $g_k = S^{-1}f_k$  یعنی  $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$  دوگان کانونی است.  $\square$

با توجه به گزاره قبل اگر  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  و  $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$  دوگان های کانونی یکدیگر باشند آن گاه

$$\begin{aligned}\langle f_k, g_k \rangle &= \langle g_k, f_k \rangle \\ &= \overline{\langle f_k, g_k \rangle}\end{aligned}$$

یعنی برای هر  $\langle f_k, g_k \rangle \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  نتیجه بعدی از مرجع [۸] آورده شده است.

**قضیه ۱-۲-۵.** فرض کنیم  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  یک قاب برای  $\mathcal{H}$  و  $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$  دوگان کانونی آن باشد آن گاه برای هر  $k \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq \langle f_k, S^{-1}f_k \rangle \leq 1$ . علاوه بر آن قاب  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  یک پایه ریس است اگر و تنها اگر

$$\langle f_k, S^{-1}f_k \rangle = 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (۶-۱)$$

**برهان.** فرض کنیم  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  یک قاب و  $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{g_k\}_{k=1}^{\infty}$  قاب دوگان کانونی  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  در فضای هیلبرت  $\mathcal{H}$  باشد، در این صورت بنا به گزاره ۱-۲-۴،

$$\begin{aligned}\langle f_k, g_k \rangle &= \sum_j \langle f_k, g_j \rangle \langle f_j, g_k \rangle \\ &= \sum_j \langle f_k, g_j \rangle \langle g_j, f_k \rangle \\ &= \sum_j |\langle f_k, g_j \rangle|^2 \\ &= |\langle f_k, g_k \rangle|^2 + \sum_{j \neq k} |\langle f_k, g_j \rangle|^2.\end{aligned}$$

در نتیجه برای هر  $k \in \mathbb{N}$

$$|\langle f_k, g_k \rangle|^2 \leq \langle f_k, g_k \rangle \in \mathbb{R}$$

بنابراین  $0 \leq \langle f_k, g_k \rangle \leq 1$ . اگر  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  و  $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$  دو پایه ریس و دوگان یکدیگر باشند آن گاه هم متعامد بوده و (۶-۱) در مورد آن ها برقرار است. از طرفی اگر (۶-۱) برقرار باشد، محاسبات بالا نشان می دهد که

$$1 = \langle f_k, g_k \rangle = (\langle f_k, g_k \rangle)^2 + \sum_{j \neq k} |\langle f_k, g_j \rangle|^2 = 1 + \sum_{j \neq k} |\langle f_k, g_j \rangle|^2$$

□

که نتیجه می شود برای هر  $k \neq j$ ,  $\langle f_k, g_j \rangle = 0$ .

قضیه بالا به کمک تساوی ساده ی (۶-۱) قاب هایی را توصیف می کند که پایه ریس هستند. می دانیم که با حذف هر عضو از پایه ریس، این پایه به یک مجموعه غیر کامل تبدیل می شود.

**قضیه ۶-۲-۱.** با حذف یک بردار مانند  $f_j$  از قاب  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  در فضای هیلبرت  $\mathcal{H}$ ، مجموعه باقیمانده یا یک قاب و یا یک مجموعه غیر کامل است. به طور دقیق تر  
 اگر  $\langle f_j, S^{-1}f_j \rangle \neq 1$  باشد آن گاه  $\{f_k\}_{k \neq j}$  یک قاب برای  $\mathcal{H}$  است.  
 اگر  $\langle f_j, S^{-1}f_j \rangle = 1$  باشد، آن گاه  $\{f_k\}_{k \neq j}$  غیر کامل است.

□

برهان. برای اثبات [۵] یا [۹] را ببینید.

**مثال ۷-۲-۱.** قاب  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{e_1, e_1, e_1, e_2, e_2, \dots\}$  را که در آن  $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$  یک پایه متعامد یکه برای  $\mathcal{H}$  را در نظر بگیرید. با حذف عضو  $e_1$  از قاب  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  باز هم  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  یک قاب خواهد بود، اما اگر هر عضوی به جز  $e_1$  حذف شود، دنباله ی حاصل قابی برای  $\mathcal{H}$  نیست و این دقیقاً نتیجه قضیه قبل است. به سادگی نشان داده می شود که  $Se_1 = 3e_1$  پس  $S^{-1}e_1 = \frac{1}{3}e_1$  و در نتیجه

$$\{\langle f_j, S^{-1}f_j \rangle\} = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, 1, \dots \right\}$$

به سادگی می توان دید که  $\{g_k\}_{k=1}^{\infty} = \{e_1, e_1, e_1, e_2, e_2, \dots\}$  یک دوگان غیر کانونی برای  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  است، زیرا خاصیت توسیع (۳-۱) را داراست. از آنجا که  $\langle f_j, g_j \rangle = \{1, 1, -1, 1, 1, \dots\}$  و این که  $\{f_k\}_{k \neq 1}$  یک قاب است، دیده می شود که قضیه قبل فقط برای دوگان کانونی برقرار است. این مثال نشان می دهد که دوگان غیر کانونی  $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$  و  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  با هم معادل نیستند و در حالت کلی، دوگان های قاب  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  با  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  هم متعامد نیستند.

مثال بالا نشان می دهد که برای هر  $x \in \mathcal{H}$  ضرایب  $\{\langle x, g_k \rangle\}$  دارای  $\ell^2$ -نرم بزرگ تری نسبت به ضرایب  $\{\langle x, S^{-1}f_k \rangle\}$  هستند. این مطلب در حالت کلی نیز برقرار است.

**لم ۸-۲-۱.** فرض کنید  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  یک قاب برای  $\mathcal{H}$  باشد. اگر  $f \in \mathcal{H}$  نمایشی به صورت  $f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$  داشته باشد، آنگاه برای دنباله ای مانند  $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$  داریم

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, S^{-1}f_k \rangle|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |c_k - \langle f, S^{-1}f_k \rangle|^2.$$

□

برهان. برای اثبات گزاره ۳.۲.۴ از مرجع [۱] را ببینید.

می دانیم که هر پایه متعامد یکه با دوگان خودش معادل است. یک قاب نیز با دوگان کانونی خودش معادل است، به ویژه وقتی قاب مورد نظر چسبان باشد. اگر  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  یک قاب چسبان برای  $\mathcal{H}$  با کران  $A$  باشد، عملگر قاب آن به صورت  $S = AI$  بوده و دوگان کانونی اش به صورت  $\{\frac{1}{A}f_k\}_{k=1}^{\infty}$  است. نتیجه زیر نشان می دهد که عکس این مطلب نیز برقرار است.

**نتیجه ۱-۲-۹.** فرض کنیم  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  یک قاب از  $\mathcal{H}$  باشد، آن گاه احکام زیر معادل اند:

$$(۱) \quad \{f_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ یک قاب چسبان است.}$$

$$(۲) \quad \text{برای } c > 0, \text{ قاب } \{f_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ دوگانی به صورت } \{cf_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ دارد.}$$

## ۳-۱ تبدیل فوریه

در این بخش تبدیل فوریه و برخی از ویژگی های آن را معرفی می کنیم. فرض کنید  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . نگاشت  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  تعریف شده به صورت

$$\hat{f}(\gamma) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i\gamma x} dx, \quad \forall \gamma \in \mathbb{R},$$

را تبدیل فوریه  $f$  می نامیم. همچنین  $\check{f}(\gamma) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{2\pi i\gamma x} dx$  را وارون تبدیل فوریه  $f$  می نامیم. نگاشت  $f \rightarrow \hat{f}$  روی  $L^1(\mathbb{R})$  را تبدیل فوریه گوئیم و تبدیل فوریه نظیر  $f$  را با نماد  $\mathcal{F}f$  نیز نمایش می دهیم. قضیه زیر خواص ابتدایی این تبدیل را نشان می دهد. برای اثبات آن می توانید ۸.۲۱ و ۸.۲۲ از مرجع [۱۰] را ببینید.

**قضیه ۱-۳-۱.** تبدیل فوریه، عملگری خطی و پیوسته از  $L^1(\mathbb{R})$  به  $C_0(\mathbb{R})$  است، به ویژه

$$\|\hat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_1 \quad (\text{الف})$$

$$\bar{\hat{f}} = \check{f} \quad (\text{ب})$$

$$\widehat{(f * g)} = \hat{f} \cdot \hat{g} \quad (\text{پ})$$

**قضیه ۱-۳-۲.** فرض  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ ، در این صورت  $\hat{f}g$  و  $f\hat{g}$  نیز در  $L^1(\mathbb{R})$  هستند و

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)g(x)dx.$$

برهان. ۸.۲۵ از مرجع [۱۱] را ببینید.

□

قضیه ۳-۳-۱. (قضیه ی پلانشرل<sup>۱</sup>) تبدیل فوریه را می توان به صورت یکتایی به یک عملگر روی  $L^2(\mathbb{R})$  تعمیم داد. در این صورت

$$\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R})$$

به ویژه

$$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2 \quad (\text{اتحاد پارسوال})$$

نتیجه ۳-۳-۱. (فرمول وارون) هر گاه  $f$  و  $\hat{f}$  در  $L^1(\mathbb{R})$  باشند، آن گاه

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{\gamma \pi i \omega x} d\omega.$$

از آنجا که توابع

$$e_k(x) := b^{\gamma/2} e^{\gamma \pi i k b x}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

پایه متعامد یکه ای برای  $L^2(0, 1/b)$  است، لذا برای هر  $f \in L^2(0, 1/b)$

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, e_k \rangle e_k.$$

هم چنین می توانیم به طور مستقیم بسط تابع  $f$  را به جای  $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  بر حسب توابع  $\{e^{\gamma \pi i k b x}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  بنویسیم. در نتیجه

$$f(\cdot) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{\gamma \pi i k b (\cdot)} \quad (7-1)$$

که در آن

$$c_k = b^{\gamma/2} \langle f, e_k \rangle = b \int_0^{1/b} f(x) e^{-\gamma \pi i k b x} dx.$$

بسط (۷-۱) را سری فوریه و خانواده ی  $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  را ضرایب فوریه متناظر  $f$  می نامیم. به عبارت دقیق تر در مورد

---

<sup>۱</sup>Plancherel

سری فوریه  $f$  هنگامی که  $n \rightarrow \infty$  می توان نوشت

$$\|f - \sum_{k=-n}^n c_k e^{\gamma \pi i k b(\cdot)}\|_{L^{\gamma}(\cdot, 1/b)} = \left( \int_0^{1/b} |f(x) - \sum_{k=-n}^n c_k e^{\gamma \pi i k b x}|^{\gamma} dx \right)^{1/\gamma} \rightarrow 0.$$

قابل ذکر است که تساوی (۷-۱) برای همه مقادیر  $x \in [0, 1/b]$  برقرار نیست. برای اثبات نتیجه زیر [۱۰] یا [۱۲] را ببینید.

**نتیجه ۱-۳-۵.** فرض کنید  $f \in L^{\gamma}(\cdot, 1/b)$  یک تابع پیوسته و متناوب با دوره تناوب  $1/b$  و ضرایب فوریه  $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^{\gamma}(\mathbb{Z})$  باشد، آن گاه

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{\gamma \pi i k b x}$$

که تساوی بالا برای هر  $x \in \mathbb{R}$  به صورت نقطه وار برقرار است.

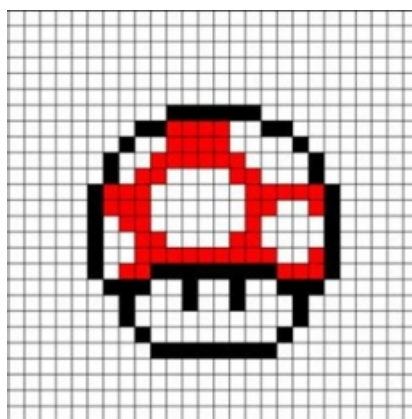


## ۴-۱ مفاهیم اولیه تصویر

در این بخش مفاهیم ابتدایی مورد نیاز پردازش تصویر را بازگو می کنیم. پیکسل<sup>۱</sup> خلاصه کلمات *picture Elements* نقطه های بسیار ریز مربعی شکلی هستند که از تجمع آن ها، تصویر روی صفحه ی نمایش یا روی کاغذ (توسط چاپگر) شکل می گیرد. همان طور که بیت، کوچکترین واحد اطلاعات قابل پردازش توسط کامپیوتر است، پیکسل نیز کوچکترین عنصر سخت افزار و نرم افزار نمایشی یا چاپی است که برای شکل گرفتن تصاویر مورد استفاده قرار می گیرد. اگر برای هر پیکسل تنها دو رنگ (معمولا سیاه و سفید) در نظر گرفته شود، توسط یک بیت از اطلاعات قابل کددهی است و در صورتی که بیش از دو بیت برای ارائه یک پیکسل استفاده شود، محدوده ی رنگ ها یا سایه های خاکستری وسیع تری قابل ارائه خواهد بود.

مقدار هر نقطه (پر یا خالی) در یک یا چند بیت اطلاعات ذخیره می شود. برای تصویر ساده ی تک رنگ، یک بیت برای نشان دادن یک نقطه کافی است اما در تصاویر رنگی و سایه خاکستری، هر نقطه نیاز به بیش از یک بیت اطلاعات دارد. تصویرهای مبتنی بر نقشه بیتی همواره به صورت شبکه های مربع شکل بزرگ می باشند. این شبکه ها مانند صفحه شطرنج یا موزاییک های کف آشپزخانه می باشند. این شبکه های مربع شکل بزرگ از مربع های کوچک تری تشکیل شده اند. یکی از مشخصه هایی که همواره می توان در مورد شبکه ها بیان نمود، این است که دارای ابعاد می باشد. صفحه شطرنج همواره  $8 \times 8$  است اما نمونه ای از شبکه ی پیکسل های تشکیل دهنده ی صفحه نمایش کامپیوتر  $800 \times 600$  است.

ابعاد شبکه در واقع معادل تعداد مربع هایی است که طول و عرض تصویر را تشکیل داده اند و ربطی به اندازه واقعی تصویر ندارند. شکل زیر که یک تصویر  $36 \times 26$  پیکسل است می تواند مفهوم پیکسل نمایش دهد.

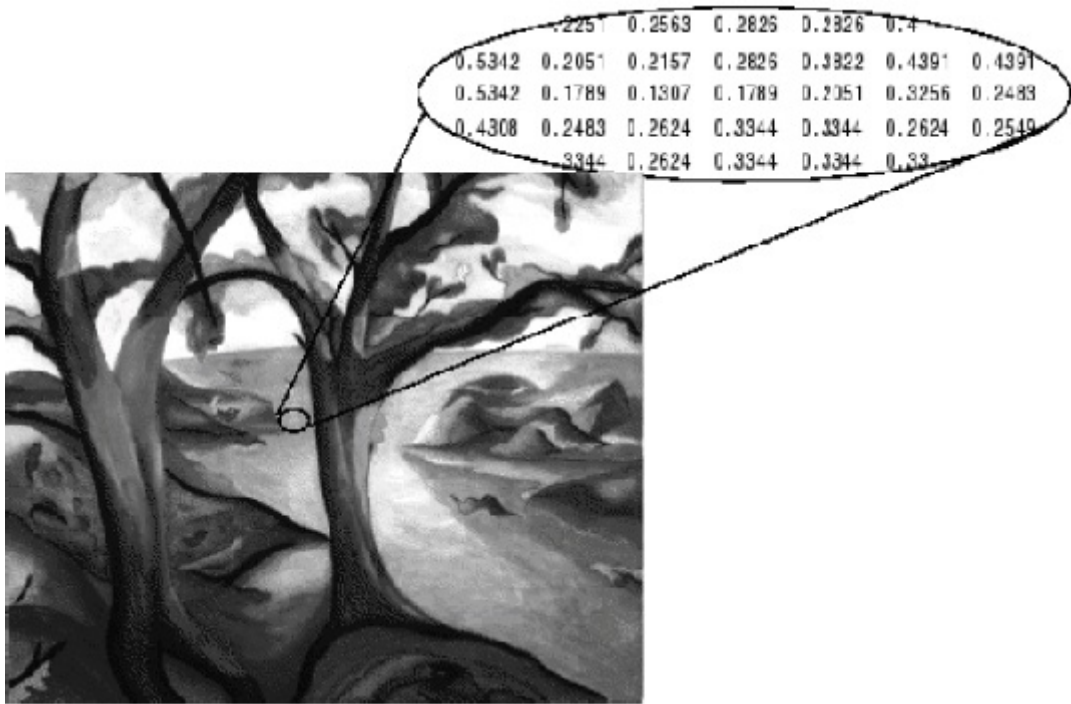


شکل ۱-۱: پیکسل

در نرم افزار متلب تصاویر به صورت ماتریس می باشند، به طوری که یک تصویر سطح خاکستری<sup>۲</sup> توسط

<sup>۱</sup>pixel      <sup>۲</sup>Gray scale

یک ماتریس دوبعدی نمایش داده می شود که درآیه های آن معرف شدت روشنایی پیکسل مربوطه است.



شکل ۱-۲: تصویر سطح خاکستری

استفاده از رنگ در پردازش تصویر، دو انگیزه اصلی دارد.

(۱) تحلیل خودکار تصویر است. رنگ توصیف گر توانایی است که در اغلب موارد شناسایی و استخراج شیء از صحنه را ساده می سازد.

(۲) در مواردی که تحلیل تصویر به وسیله انسان انجام می شود، چشم انسان قادر است هزاران سایه و شدت رنگ را در مقایسه با حدود ۲۴ سایه خاکستری تشخیص دهد. پردازش تصویر رنگی در حوزه اصلی به دو دسته تقسیم می شود: پردازش تمام رنگ و پردازش شبه رنگی.

در گروه اول، تصاویر مورد نظر معمولاً با یک حس گر<sup>۱</sup> تمام رنگی نظیر دوربین تلویزیون رنگی با پیمایش گر رنگی<sup>۲</sup> برداشته می شوند.

در گروه دوم، به هر شدت تک رنگ خاص یا محدوده ای از شدت ها یک سایه رنگی منتسب می شود. تقریباً تا همین اواخر بیشتر پردازش تصویر به صورت شبه رنگ انجام می شد.

پیشرفت قابل توجهی که در دهه ۱۹۸۰ انجام شد، باعث گردید حس گرهای رنگی و سخت افزار لازم برای پردازش تصویر رنگی با قیمت های قابل قبولی در دسترس قرار گیرند. در نتیجه این پیشرفت ها استفاده از روش های پردازش تصویر تمام رنگی در محدوده وسیعی از کاربردها افزایش پیدا کرده است. نرم افزار متلب نیز

<sup>۱</sup>Sensor      <sup>۲</sup>Color scanner

توانایی کار روی تصاویر رنگی<sup>۱</sup> را دارد، به طوری که هر پیکسل تصویر رنگی با سه عدد مشخص می شود که هر عدد متناظر با شدت یک از رنگ های قرمز، سبز و آبی است. (در حقیقت می دانیم که هر رنگ را می توان با ترکیبی از این رنگ های اصلی به دست آورد). در متلب هر تصویر رنگی به صورت یک آرایه  $m \times n \times 3$  (یعنی یک آرایه سه بعدی) ذخیره می شود. این آرایه، در واقع شامل سه ماتریس رنگ است که هر ماتریس مشخص کننده ی شدت یکی از رنگ ها برای تمام پیکسل های مختلف می باشد.



شکل ۱-۳: تصویر رنگی

<sup>۱</sup>True color

## فصل ۲

# موجک قاب های چسبان

سابقه نظریه موجک ها حداقل به سال ۱۹۱۰ برمی گردد که اولین بار توسط هار مطرح شد ولی از سال ۱۹۸۵ ریاضی دانان زیادی آنالیز موجک را مورد توجه قرار داده اند. کاربرد موجک ها آن قدر راضی کننده بود که به سرعت توجه مهندسين و افراد با تخصص های گوناگون را برای حل مسائل مختلف با استفاده از این نظریه جلب کرد. سر آمد افرادی که موجک ها را به صورت کاربردی در دهه ۹۰ مطالعه کرد خانم دویشی<sup>۱</sup> بود که موجک های زیادی را معرفی نمود. هم چنین در سال ۱۹۹۵ ونگ<sup>۲</sup> شکل کلی موجک های  $MRA$  که نوع خاصی از موجک ها است را بدست آورد. در سال ۱۹۹۸، بندتو<sup>۳</sup> نشان داد که چگونه صافی های زیادی قاب های  $MRA$  را تولید می کنند [۱۳]. در سال ۲۰۰۱ نشان داده شد که موجک قاب های چسبانی که از یک  $MRA$  به دست می آیند دقیقاً توابعی مانند  $\psi$  هستند که از صافی های تعمیم یافته پائین گذر حاصل می شوند. هدف ما در این بخش بررسی ساختار موجک قاب های چسبان  $MRA$  می باشد.

## ۱-۲ آنالیز چند ریزگی برای موجک های متعامد

در این قسمت به بررسی ساختار موجک ها (متعامد) و آنالیز چندریزگی می پردازیم.

تعریف ۱-۲-۱. تابع  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  را موجک (متعامد) گوئیم هرگاه  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}} = \{2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j \cdot - k)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  یک پایه (متعامد یکه) برای  $L^2(\mathbb{R})$  باشد.

قضیه زیر یکی از قضایای اصلی در بحث موجک های متعامد است که ساختار این گونه موجک ها را مشخص می کند.

<sup>۱</sup>Daubechies

<sup>۲</sup>Wang

<sup>۳</sup>Benedetto

قضیه ۲-۱-۲. تابع  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  با  $\|\psi\|_2 \geq 1$  موجک متعامد است اگر و فقط اگر شرایط زیر برقرار باشد:

$$\sum |\hat{\psi}(2^j \xi)|^2 = 1 \quad a.e. \quad \xi \in \mathbb{R} \quad (1-2)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \hat{\psi}(2^j \xi) \overline{\hat{\psi}(2^j(\xi + 2m\pi))} = 0 \quad a.e. \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad m \in 2\mathbb{Z} + 1. \quad (2-2)$$

برهان. برای اثبات قضیه مرجع [۱۴] را ببینید.  $\square$

اگر در قضیه فوق فرض  $\|\psi\|_2 \geq 1$  را حذف کنیم آنگاه دو شرط (۱-۲) و (۲-۲) معادل با این هستند که  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  یک قاب چسبان با ثابت یک باشد. برای تعامد دستگاه  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  شرایط معادلی وجود دارد که در قضیه بعد بیان می شود.

قضیه ۳-۱-۲. دستگاه  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  متعامد یکه است اگر و فقط اگر شرایط زیر برقرار باشند:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\xi + 2k\pi)|^2 = 1 \quad a.e. \quad \xi \in \mathbb{R} \quad (3-2)$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\psi}(2^j(\xi + 2k\pi)) \overline{\hat{\psi}(\xi + 2k\pi)} = 0 \quad a.e. \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad j \geq 1. \quad (4-2)$$

برهان. برای اثبات قضیه مرجع [۱۴] را ببینید.  $\square$

چهار شرط (۱-۲)، (۲-۲)، (۳-۲) و (۴-۲) که دو شرط آن مربوط به موجک های متعامد و دو شرط دیگر مربوط به دستگاه متعامد یکه است را معادلات پایه می گوئیم.

تعریف ۴-۱-۲. یک آنالیز چند ریزگی (MRA) شامل یک دنباله از زیر فضاهای بسته  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  از  $L^2(\mathbb{R})$  است که در شرایط زیر صدق کند:

$$(1) \quad \text{برای هر } j \in \mathbb{Z}, \quad V_j \subset V_{j+1}$$

$$(2) \quad \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\} \text{ و } \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$$

$$(3) \quad f \in V_j \text{ اگر و فقط اگر } f(2 \cdot) \in V_{j+1} \text{ برای هر } j \in \mathbb{Z}.$$

$$(4) \quad f \in V_0 \text{ اگر و فقط اگر } f(\cdot - j) \in V_0 \text{ برای هر } j \in \mathbb{Z}.$$

(5) تابعی مانند  $\phi \in V_0$  موجود باشد به طوری که خانواده  $\{\phi(\cdot - n); n \in \mathbb{Z}\}$  یک پایه متعامد یکه برای  $V_0$  باشد.

تابع  $\phi$  معرفی شده در شرط اخیر را تابع مقیاس آنالیز چند ریزگی داده شده نامیم.

**قضیه ۵-۱-۲.** اگر  $g \in L^2(\mathbb{R})$ ، آن گاه  $\{g(\cdot - k); k \in \mathbb{Z}\}$  یک دستگاه متعامد یکه است، اگر و فقط اگر

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2 = 1 \quad a.e. \quad \xi \in \mathbb{R}$$

**برهان.** بنا به قضیه پلانشرل داریم

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} g(x) \overline{g(x+k)} dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(\xi)|^2 e^{ik\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{2l\pi}^{2(l+1)\pi} |\hat{g}(\xi)|^2 e^{ik\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} |\hat{g}(\xi + 2l\pi)|^2 e^{ik\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\xi + 2l\pi)|^2 \right) e^{ik\xi} d\xi. \end{aligned}$$

اکنون اگر  $\sum |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2 = 1$  آن گاه به وضوح  $\{g(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$  یک دستگاه متعامد یکه است. بر

عکس فرض کنیم  $\{g(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$  متعامد باشد آن گاه

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\xi + 2l\pi)|^2 \right) e^{ik\xi} d\xi = \delta_{k,0}.$$

اکنون با توجه به  $2\pi$ -دوره ای بودن  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2$  خواهیم داشت

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2 = 1 \quad a.e.$$

□

**قضیه ۶-۱-۲.** فرض کنیم  $g \in L^2(\mathbb{R})$  و  $\{g(\cdot - k); k \in \mathbb{Z}\}$  یک دستگاه متعامد یکه باشد. در این صورت

$|supp(\hat{g})| \geq 2\pi$ ، در این نامساوی، تساوی برقرار است اگر و فقط اگر  $|\hat{g}| = \chi_K$  برای مجموعه ی اندازه پذیر

$K \subset \mathbb{R}$  به طوری که  $|K| = 2\pi$ .

**برهان.** چون  $\|g\|_2 = 2\pi$  و  $\|\hat{g}\|_2 = 2\pi$  بنا به قضیه ۵-۱-۲ داریم  $|\hat{g}(\xi)| \leq 1$  تقریباً همه جا روی  $\mathbb{R}$ . بنابراین

$|supp(\hat{g})| = \int_{supp(\hat{g})} 1 d\xi \geq \int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi = 2\pi$  و  $|\hat{g}(\xi)| < 1$  اگر  $|supp(\hat{g})| = 2\pi$ .

روی یک مجموعه  $E$  با اندازه مثبت، آن گاه ثابت می کنیم  $|\hat{g}| = \chi_K$ . برای این منظور داریم

$$2\pi = \|\hat{g}\|_2^2 = \int_{\text{supp}(\hat{g})} |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi \leq |(\text{supp}(\hat{g})) - E| + |E| = |\text{supp}(\hat{g})| = 2\pi$$

که رابطه بالا با این فرض که  $1 > |\hat{g}(\xi)| > 0$  متناقض است، بنابراین نتیجه می شود  $|\hat{g}(\xi)| = 1$ . سرانجام اگر  $|\hat{g}| = \chi_K$  و دستگاه  $\{g(\cdot - k); k \in \mathbb{Z}\}$  متعامد باشد آن گاه

$$|K| = |\text{supp}(\hat{g})| = \int_{\text{supp}(\hat{g})} 1 d\xi = \int_K \chi_K = \int_{\text{supp}(\hat{g})} |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi = \|\hat{g}\|_2^2 = 2\pi$$

□ که این عکس قسمت دوم قضیه را ثابت می کند و حکم ثابت می شود.

موجک  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  که در آن  $|\text{supp}(\hat{\psi})| = 2\pi$  را یک موجک با تکیه گاه فرکانسی مینیمال یا MSF<sup>1</sup> گوئیم.

در ادامه نحوه ساخت موجک ها از یک MRA داده شده را بررسی می کنیم.

**تعریف ۲-۱-۷.** فرض کنیم  $\{V_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$  یک آنالیز چند ریزگی برای  $L^2(\mathbb{R})$  باشد،  $W_m$  را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$W_m = \{f \in V_{m+1}, f \perp V_m\}.$$

در این صورت  $W_m = V_{m+1} \cap V_m^\perp$ .

ادعا می کنیم که  $V_{m+1} = V_m \oplus W_m$ . برای اثبات این ادعا داریم

$$\begin{aligned} V_m \oplus W_m &= V_m \oplus (V_{m+1} \cap V_m^\perp) \\ &= (V_m \oplus V_{m+1}) \cap (V_m \oplus V_m^\perp) \\ &= (V_m \oplus V_{m+1}) \cap L^2(\mathbb{R}) \\ &= (V_m \oplus V_{m+1}) = V_{m+1}. \end{aligned}$$

آخرین تساوی بنا به خاصیت (۱) تعریف ۲-۱-۴ برقرار است.

**قضیه ۲-۱-۸.** با مفروضات فوق داریم  $L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j=-\infty}^{+\infty} W_j$ .

<sup>1</sup>Minimally Supported Frequency

برهان. می دانیم

$$\begin{aligned} V_{m+1} &= V_m \oplus W_m = V_{m-1} \oplus W_{m-1} \oplus W_m \\ &= V_{m-2} \oplus W_{m-2} \oplus W_{m-1} \oplus W_m \\ &= \dots = \bigoplus_{j=-\infty}^{j=m} W_j \quad (m \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

چون زمانی که  $j \rightarrow +\infty$  نتیجه می شود

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j=-\infty}^{j=+\infty} W_j.$$

□

تساوی فوق نشان می دهد که برای یافتن یک پایه متعامد یکه برای  $L^2(\mathbb{R})$  کافی است یک پایه متعامد یکه برای هر  $W_m$  بیابیم، بنابراین تابع  $\psi$  را طوری می یابیم که  $\{\psi_{m,n}; n \in \mathbb{Z}\}$  یک پایه متعامد یکه برای  $W_m$  باشد. اکنون در قالب قضیه ای بیان می کنیم که برای یافتن یک پایه متعامد یکه برای  $L^2(\mathbb{R})$  کافی است یک پایه متعامد یکه برای  $W_0$  بیابیم. در ابتدا به بیان مقدماتی می پردازیم سپس قضیه را عنوان می کنیم.

**تعریف ۹-۱-۲.** برای هر تابع  $f \in L^2(\mathbb{R})$  و هر  $t \in \mathbb{R}$  عملگر اتساع دوتایی  $D$  به صورت  $Df(x) := \sqrt{2}f(2x)$  و عملگر انتقال  $T$  به صورت  $T_t f(x) := f(x-t)$  تعریف می شوند. برای  $j \in \mathbb{Z}$  داریم  $T_t D^j = D^j T_{2^j t}$ .

**قضیه ۱۰-۱-۲.** فرض کنیم  $\{V_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$  یک آنالیز چندریزیگی برای  $L^2(\mathbb{R})$  و همچنین  $\{\psi(\cdot - n); n \in \mathbb{Z}\}$  یک پایه متعامد یکه برای  $V_0 = V_1 \cap V_0^\perp$  باشد. آن گاه

الف) برای هر  $m \in \mathbb{Z}$ ،  $\{\psi_{m,n} : n \in \mathbb{Z}\}$  که  $\{\psi_{m,n} : n \in \mathbb{Z}\} = \{2^{\frac{m}{4}} \psi(2^m \cdot -n)\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$  یک پایه متعامد یکه برای  $W_m = V_{m+1} \cap V_m^\perp$  است.

ب)  $\{\psi_{m,n} : m, n \in \mathbb{Z}\}$  یک پایه متعامد یکه برای  $L^2(\mathbb{R})$  است، یعنی  $\psi$  یک موجک متعامد است.

برهان. الف) بنا به قسمت (۳) تعریف ۴-۱-۲ نتیجه می شود که برای  $j, k \in \mathbb{Z}$

$$\langle \psi_{m,j}, \psi_{m,k} \rangle = \langle D^{2^m} \psi_{0,j}, D^{2^m} \psi_{0,k} \rangle = \langle \psi_{0,j}, \psi_{0,k} \rangle = \delta_{j,k}$$



یعنی خانواده  $\{\psi_{m,n} : n \in \mathbb{Z}\}$  متعامد یکه است. فرض کنیم  $f \in W$ ، آن گاه  $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \psi_{\cdot,n}$  که در آن  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ . بنا به تعریف  $W$ ،  $f \in V_1$  و برای هر  $g \in V_0$  داریم  $f \perp g$ ، بنابراین  $\mathcal{D}^m f \in V_{m+1}$  و

$$\langle \mathcal{D}^m f, \mathcal{D}^m g \rangle = \langle f, g \rangle = 0, \quad g \in V_0.$$

از آنجا که برای هر  $m \in \mathbb{Z}$  داریم  $\mathcal{D}^m V_0 = V_m$  بنابراین برای هر  $q \in V_m$  داریم

$$\langle \mathcal{D}^m f, q \rangle = 0$$

پس  $\mathcal{D}^m f \in W_m = V_{m+1} \cap V_m^\perp$ . از طرفی  $\mathcal{D}^m$  یک عملگر یک به یک و پوشا است، پس برای هر  $m \in \mathbb{Z}$  داریم  $\mathcal{D}^m W_0 = W_m$  و در نتیجه

$$\mathcal{D}^m f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \mathcal{D}^m \psi_{\cdot,n} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \psi_{m,n}.$$

یعنی خانواده  $\{\psi_{m,n} : n \in \mathbb{Z}\}$  زیر فضای  $W_m$  را پدید می آورد و بنابراین یک پایه متعامد یکه است. (ب) چون  $L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{m=-\infty}^{+\infty} W_m$  و برای  $j \neq k$   $W_j \perp W_k$  بنابراین اگر  $r \neq m$  یا  $s \neq n$  داریم  $\langle \psi_{m,n}, \psi_{r,s} \rangle = 0$  و برای هر  $m, n \in \mathbb{Z}$   $\|\psi_{m,n}\|_2 = 1$  لذا با توجه به قسمت (الف) نتیجه می شود که خانواده  $\{\psi_{m,n} : m, n \in \mathbb{Z}\}$  یک پایه متعامد یکه برای  $L^2(\mathbb{R})$  است.  $\square$

چون  $\varphi \in V_0$  پس بنا به قسمت (۳) تعریف ۲-۱-۴ داریم  $\varphi(\frac{\cdot}{2}) \in V_{-1}$  و بنا به (۱) همان تعریف داریم  $\varphi(\frac{\cdot}{2}) \in V_{-1} \subset V_0$ ، از طرفی چون  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  زیر فضاهای  $L^2(\mathbb{R})$  هستند بنابراین نتیجه می شود

$$\frac{1}{2} \varphi\left(\frac{\cdot}{2}\right) \in V_{-1} \subset V_0.$$

از طرفی بنا به قسمت (۵) تعریف ۲-۱-۴ داریم

$$\frac{1}{2} \varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \varphi(x+k) \quad (۵-۲)$$

که  $\alpha_k = \frac{1}{2} \int \varphi\left(\frac{x}{2}\right) \overline{\varphi(x+k)} dx$  همگرایی (۵-۲) در  $L^2(\mathbb{R})$  است و  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k|^2 < \infty$  با استفاده از

تبدیل فوریه نتیجه می شود

$$\hat{\varphi}(2\xi) = \hat{\varphi}(\xi) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{ik\xi} = \hat{\varphi}(\xi) m_0(\xi) \quad (6-2)$$

$$m_0(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{ik\xi}$$

**تعریف ۲-۱-۱۱.** تابع  $m_0$  که یک تابع  $2\pi$ -دوره ای در  $L^2([-\pi, \pi])$  است را یک صافی پایین گذر متناظر با تابع مقیاس  $\varphi$  می نامیم.  $m_0$  را یک صافی پایین گذر است بدین معنی که فرکانس های پایین را عبور می دهد و فرکانس های بالا را صفر می کند. قضیه زیر ویژگی کلی یک صافی پایین گذر را بررسی می کند.

**قضیه ۲-۱-۱۲.** اگر  $m_0$  یک صافی پایین گذر متناظر با تابع مقیاس  $\varphi$  باشد، آن گاه

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1 \quad a.e. \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (7-2)$$

**برهان.** چون  $\varphi$  یک تابع مقیاس است، بنا به قسمت (۵) تعریف ۲-۱-۴ خانواده  $\{\varphi(\cdot - k); k \in \mathbb{Z}\}$  یک دستگاه متعامد یکه است. بنابراین از قضیه ۲-۱-۵ نتیجه می شود

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(2\xi + 2k\pi)|^2 = 1 \quad a.e. \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

بنابه (۲-۵) داریم

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + k\pi)|^2 |m_0(\xi + k\pi)|^2 = 1 \quad a.e. \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

جمع سمت چپ فرمول بالا را روی اعداد صحیح زوج و فرد به طور جداگانه اعمال می کنیم. در این صورت

$$\begin{aligned} 1 &= |m_0(\xi)|^2 \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + 2l\pi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + \pi + 2l\pi)|^2 \\ &= |m_0(\xi)|^2 \cdot 1 + |m_0(\xi + \pi)|^2 \cdot 1. \end{aligned}$$

□

**قضیه ۲-۱-۱۳.** فرض کنیم  $\varphi$  یک تابع مقیاس برای آنالیز چندریزیگی  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  و  $m_0$  صافی پایین گذر متناظر

با آن باشد. در این صورت تابع  $\psi \in W_0 = V_1 \cap V_0^\perp$  یک موجک متعامد برای  $L^2(\mathbb{R})$  است اگر و فقط اگر

$$\hat{\psi}(2\xi) = e^{i\xi} \nu(2\xi) \overline{m_0(\xi + \pi)} \hat{\psi}(\xi) \quad a.e. \text{ on } \mathbb{R} \quad (8-2)$$

برای تابع اندازه پذیر  $2\pi$ -دوره ای  $\nu$  که

$$|\nu(\xi)| = 1 \quad a.e. \text{ on } \mathbb{T}.$$

مثال ۲-۱-۱۴. (موجک هار) فرض کنیم  $V_j$  فضای توابعی در  $L^2(\mathbb{R})$  باشد که روی بازه های به صورت  $[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)]$ ،  $k \in \mathbb{Z}$  ثابت باشند. آن گاه به سادگی نشان داده می شود که  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  یک MRA برای  $L^2(\mathbb{R})$  بوده و  $\varphi(x) = \chi_{[-1,0)}(x)$  یک تابع مقیاس برای آن است.

## ۲-۲ آنالیز چند ریزگی برای زیر فضاهای تحت انتقال پایا

برای تابع  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$  داده شده، زیر فضای تحت انتقال پایای  $V(\phi) \subset L^2(\mathbb{R})$  تولید شده به وسیله  $\phi$  تعریف می کنیم

$$V(\phi) := \overline{\text{span}}\{\phi(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\},$$

$V_n$  را به صورت  $2^n$ -اتساع از  $V(\phi)$  نمایش می دهیم، یعنی

$$V_n = \overline{\text{span}}\{\phi(2^n \cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (9-2)$$

داریم  $V_0 = V$ . زیر فضای  $S \subset L^2(\mathbb{R})$  را انتقال پایا گوئیم اگر برای هر  $t \in \mathbb{R}$  و  $f \in S$ ، داشته باشیم  $f(\cdot - t) \in S$ . زیر فضای  $S$  را  $s$ -انتقال پایا<sup>۱</sup> گوئیم اگر برای هر  $k \in \mathbb{Z}$  و  $f \in S$ ، داشته باشیم  $f(\cdot - sk) \in S$ ، به ویژه اگر  $s = 1$ ، گوئیم  $S$  زیر فضای تحت انتقال پایا است. حال برای دنباله  $\{V_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ، از زیر فضاهای داده شده، گوئیم  $V_n$  تشکیل یک آنالیز چند ریزگی<sup>۲</sup> (MRA) برای  $L^2(\mathbb{R})$  می دهد، اگر شرایط

<sup>۱</sup>s-shift invariant      <sup>۲</sup>Multi Resolution Analysis

زیر برقرار باشد:

$$V_n \subset V_{n+1}, n \in \mathbb{Z}; \quad (10-2)$$

$$\overline{\cup_n V_n} = L^2(\mathbb{R}); \quad (11-2)$$

$$\cap_n V_n = \{0\}. \quad (12-2)$$

در اینجا  $\phi$  را مولد  $MRA$  گوئیم.

برای اینکه (۱۰-۲) برقرار باشد، مولد  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$  باید در  $V_1$  باشد. وقتی  $\phi \in V_1$ ، چون  $V_1$ ،  $\frac{1}{2}$ -انتقال پایاست لذا تغییرات  $\phi$  نیز در  $V_1$  هستند. بنابراین برای داشتن  $V_0 \subset V_1$ ، طبیعی است که تعریف پذیر  $\phi$  بودن لازم باشد. تابع  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$  تعریف پذیر گفته می شود اگر  $h_0 \in L^2(\mathbb{Z})$  وجود داشته باشد به طوری که

$$\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_0(k) \phi(2x - k). \quad (13-2)$$

دنباله  $h_0$  ماسک تعریف  $\phi$  نامیده می شود. در حوزه ی فوریه تعریف تعریف پذیری  $\phi$  را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\widehat{\phi}(2\cdot) = \widehat{h_0} \widehat{\phi}. \quad (14-2)$$

در اینجا  $\widehat{\phi}$  تبدیل فوریه  $\phi$  را نمایش می دهد و  $\widehat{h_0}$  سری فوریه دنباله  $h_0$  را نمایش می دهد. هرگاه اصل توسیع یکانی برای ساخت موجک قاب های چسبان به کار برده می شود، معمولاً فرض می کنیم که  $\phi$  و انتقال هایش تشکیل دنباله بسط می دهد، یعنی  $C < \infty$  موجود است به طوری که برای هر دنباله  $b \in l^2(\mathbb{Z})$  داریم

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} b(k) \phi(\cdot - k) \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C \|b\|_{l^2(\mathbb{Z})}. \quad (15-2)$$

ضرب براکتی دو تابع  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$  را به صورت زیر تعریف می کنیم و با  $[f, g]$  نمایش می دهیم،

$$[f, g](\xi) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\xi + 2\pi k) \overline{g(\xi + 2\pi k)}.$$

گزاره ۲-۲-۱. فرض کنید  $f, \phi \in L^2(\mathbb{R})$ ، همچنین فرض کنید  $[\widehat{\phi}, \widehat{\phi}]$  کراندار کلی باشد. در این صورت

'Refinable      'Refinement mask

(۱) انتقال های  $\phi$  تشکیل دستگاه بسط می دهد، یعنی (۲-۱۵) برای انتقال های  $\phi$  برقرار است. علاوه بر این،

$$\text{کران بسط } C \text{ در (۲-۱۵) برابر است با } \|\hat{\phi}, \hat{\phi}\|_{L^\infty([- \pi, \pi])}^{\frac{1}{2}}.$$

(۲) تابع  $2\pi$ - دوره ای  $[f, \hat{\phi}] \in L^1([- \pi, \pi])$ ، سری فوریه ای از دنباله  $\{ \langle f, \phi(\cdot - k) \rangle : k \in \mathbb{Z} \}$  می باشد. در نتیجه،

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi(\cdot - k) \rangle e^{-ik\xi} = [f, \hat{\phi}](\xi) \quad a.e.$$

(۳) عملگر  $P_n$  کراندار است و کرانش  $\|\hat{\phi}, \hat{\phi}\|_{L^\infty([- \pi, \pi])}$  می باشد. بعلاوه، تبدیل فوریه ی  $P_n f$  به صورت

$$\widehat{P_n f} = [\hat{f}(2^n \cdot), \hat{\phi}](2^{-n} \cdot) \hat{\phi}(2^{-n} \cdot) \quad (2-16)$$

می باشد.

برهان. برای (۱) نشان می دهیم  $\tilde{\phi} := [\hat{\phi}, \hat{\phi}]^{\frac{1}{2}}$  بنا به قضیه ی پلانشرال، برای همه ی دنباله های متناهی

$b \in l^2(\mathbb{Z})$  داریم

$$2\pi \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} b[k] \phi(\cdot - k) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|\hat{b}\hat{\phi}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

با شکستن خط حقیقی به  $\mathbb{R} = \cup_{k \in \mathbb{Z}} \{[- \pi, \pi] + 2k\pi\}$  و با توجه به این که  $2\pi \hat{b}$  دوره ای است، داریم

$$\begin{aligned} \|\hat{b}\hat{\phi}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \int_{\mathbb{R}} |\hat{b}(\xi)|^2 |\hat{\phi}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{[- \pi, \pi] + 2k\pi} |\hat{b}(\xi)|^2 |\hat{\phi}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{- \pi}^{\pi} |\hat{b}(\xi)|^2 |\hat{\phi}(\xi + 2k\pi)|^2 d\xi \\ &= \|\hat{b}\hat{\phi}\|_{L^2([- \pi, \pi])}^2. \end{aligned}$$

بنابراین رابطه زیر بدست می آید

$$2\pi \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} b[k] \phi(\cdot - k) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|\hat{b}\hat{\phi}\|_{L^2([- \pi, \pi])}^2. \quad (2-17)$$

اگر  $\hat{\phi}$  کراندار کلی باشد، آن گاه رابطه (۲-۱۷) برای همه  $b \in l^2(\mathbb{Z})$  برقرار است. لذا

$$\|\hat{b}\hat{\phi}\|_{L^1([-\pi,\pi])} \leq C\|\hat{b}\|_{L^2([-\pi,\pi])},$$

که  $C = \|\hat{\phi}\|_{L^\infty(-\pi,\pi)}$  پس (۲-۱۵) نتیجه می شود.

اثبات (۲)، با استفاده از قضیه فوبینی<sup>۱</sup> و این که  $e^{ik\xi}$ ، دوره ای است، برای هر  $k \in \mathbb{Z}$  داریم

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} [\hat{f}, \hat{\phi}](\xi) e^{ik\xi} d\xi &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\xi + 2k\pi) \overline{\hat{\phi}(\xi + 2k\pi)} e^{ik\xi} d\xi \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(\xi + 2k\pi) \overline{\hat{\phi}(\xi + 2k\pi)} e^{ik\xi} d\xi \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{[-\pi,\pi]+2k\pi} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{\phi}(\xi)} e^{ik\xi} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{\phi}(\xi)} e^{ik\xi} d\xi. \end{aligned}$$

حال بنا به قضیه پلانشرال داریم

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{\phi}(\xi)} e^{ik\xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{\phi}(\xi)} e^{-ik\xi} d\xi = 2\pi \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\phi(x-k)} dx.$$

بنابراین داریم

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\hat{f}, \hat{\phi}](\xi) e^{ik\xi} d\xi = \langle f, \phi(\cdot - k) \rangle,$$

و این یعنی  $[\hat{f}, \hat{\phi}](\xi)$ ، سری فوریه ی  $\{\langle f, \phi(\cdot - k) \rangle : k \in \mathbb{Z}\}$  است.

اثبات (۳)، کرانداری  $\mathcal{P}_n$  مستقیماً از  $\|\mathcal{P}_n\| = \|\mathcal{P}_0\|$  نتیجه می شود، و انتقال های  $\phi$  تشکیل دستگاه بسط می دهد. حال رابطه (۲-۱۶) را نشان می دهیم. توجه داشته باشید که  $\mathcal{P}_n = D^n \mathcal{P}_0 D^{-n}$ . لذا کافی است نشان

دهیم

$$\widehat{\mathcal{P}_0 f} = [\hat{f}, \hat{\phi}]\hat{\phi}.$$

در حقیقت، داریم:

<sup>۱</sup>Fubini's theorem

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{P}.f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi(\cdot - k) \rangle \phi(x - k) e^{-i\xi x} dx \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi(\cdot - k) \rangle e^{-ik\xi} \int_{\mathbb{R}} \phi(x - k) e^{-i\xi(x-k)} dx \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi(\cdot - k) \rangle e^{-ik\xi} \hat{\phi}(\xi) \\
&= [\hat{f}, \hat{\phi}](\xi) \hat{\phi}(\xi),
\end{aligned}$$

از آنجا که مجموع فوق در  $L^2(\mathbb{R})$  همگرا است و تبدیل فوریه در  $L^2(\mathbb{R})$  پیوسته است، لذا جابجایی ترتیب مجموع و انتگرال قابل توجیه می باشد.  $\square$

## ۳-۲ ساخت موجک قاب چسبان با استفاده از آنالیز چند ریزگی

در این بخش پس از بررسی موجک قاب های چسبان برای  $L^2(\mathbb{R})$ ، به ساخت آن به وسیله آنالیز چند ریزگی می پردازیم.

### ۱-۳-۲ موجک قاب های چسبان برای $L^2(\mathbb{R})$

تعریف ۱-۳-۲. تابع  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  را موجک قاب چسبان گوئیم اگر دستگاه  $\{\psi_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  که  $\psi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k)$  قاب چسبان با ثابت یک برای  $L^2(\mathbb{R})$  باشد، یعنی

$$\sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 = \|f\|_2^2 \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

بنا به تعریف قاب داریم

$$Sf = \sum \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}.$$

در نتیجه بنا به تعریف قاب چسبان داریم

$$\langle Sf, f \rangle = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 = \|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle.$$

از رابطه بالا نتیجه می شود که  $Sf = f$ . بنابراین  $\psi$  یک موجک قاب چسبان است اگر و تنها اگر

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k} \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

قضیه زیر، مشابه حالت موجک ها، موجک قاب های چسبان را توصیف می کند.

قضیه ۲-۳-۲. تابع  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  یک موجک قاب چسبان است اگر و فقط اگر در شرایط زیر صدق کند:

$$\sum |\hat{\psi}(2^j \xi)|^2 = 1 \quad a.e.$$

$$t_q(\xi) = \sum_{j \geq 0} \hat{\psi}(2^j \xi) \overline{\hat{\psi}(2^j(\xi + 2^j q \pi))} = 0 \quad a.e.$$

که  $q$  یک عدد فرد صحیح باشد.

□

برهان. برای اثبات به مرجع [۱۴] مراجعه کنید.

## ۲-۳-۲ ساخت موجک قاب چسبان

برای  $\Psi := \{\psi_1, \dots, \psi_r\} \subset L^2(\mathbb{R})$  داده شده، دستگاه موجک (یا سیستم آفین) را به صورت

$$X(\Psi) := \{\psi_{l,n,k} : 1 \leq l \leq r; n, k \in \mathbb{Z}\}, \quad (18-2)$$

تعریف می کنیم که  $\psi_{l,n,k} = D^n T_k \psi_l = 2^{n/2} \psi_l(2^n \cdot - k)$ . دستگاه  $X(\Psi) \subset L^2(\mathbb{R})$  را موجک قاب چسبان  $L^2(\mathbb{R})$  نامیم اگر

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \sum_{g \in X(\Psi)} |\langle f, g \rangle|^2,$$

برای هر  $f \in L^2(\mathbb{R})$  برقرار باشد، که  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  حاصلضرب داخلی در  $L^2(\mathbb{R})$  است و

$$\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$$

که این معادل است با

$$f = \sum_{g \in X(\Psi)} \langle f, g \rangle g,$$



در اینجا  $\{ \langle f, g \rangle \}_{g \in X(\Psi)}$  را ضرایب قاب چسبان کانونی<sup>۱</sup> نامیده می شود. واضح است که هر پایه متعامد، قاب چسبان است. هرگاه  $X(\Psi)$  پایه متعامد روی  $L^2(\mathbb{R})$  تشکیل دهد، آن گاه  $X(\Psi)$  پایه موجک متعامد نامیده می شود. هرگاه  $X(\Psi)$  قاب چسبان روی  $L^2(\mathbb{R})$  تشکیل دهد، آن گاه  $X(\Psi)$  قاب موجک چسبان نامیده می شود. به طور کلی، دستگاه  $X(\Psi) \subset L^2(\mathbb{R})$  موجک قاب<sup>۲</sup> روی  $L^2(\mathbb{R})$  نامیده می شود اگر ثابت های  $0 < C_1 \leq C_2 < \infty$  موجود باشند به طوری که

$$C_1 \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq \sum_{g \in X(\Psi)} |\langle f, g \rangle|^2 \leq C_2 \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$$

برای هر  $f \in L^2(\mathbb{R})$  برقرار باشد. گوئیم  $X(\Psi)$  دستگاه بسل است اگر فقط نامساوی راست برقرار باشد.

**قضیه ۲-۳-۳.** [۸] دستگاه موجک  $X(\Psi)$  قاب چسبان روی  $L^2(\mathbb{R})$  است اگر و فقط اگر ویژگی

$$\sum_{\psi \in \Psi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^k \xi)|^2 = 1; \quad \sum_{\psi \in \Psi} \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\psi}(2^k \xi) \overline{\hat{\psi}(2^k(\xi + (2j+1)2\pi))} = 0 \quad (j \in \mathbb{Z}) \quad (19-2)$$

برای تقریباً همه  $\xi \in \mathbb{R}$  همچنین  $X(\Psi)$  پایه متعامد روی  $L^2(\mathbb{R})$  است، اگر و فقط اگر (۱۹-۲) برقرار باشد و  $\|\psi\| = 1$  برای همه  $\psi \in \Psi$ .

### ۲-۳-۳ اصل توسیع یکانی

فرض کنید  $\{V_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  MRA تولید شده توسط تابع نظریف پذیر  $\phi$  با ماسک نظریف  $h$  باشد. هدف ساخت موجک قاب چسبان بر پایه MRA یافتن  $V_1 \subset V_1$  است، به طوری که  $X(\Psi)$  تشکیل یک قاب چسبان روی  $L^2(\mathbb{R})$  بدهد. از آنجا که  $V_1$  زیر فضای  $\frac{1}{2}$ -انتقال پایای تولید شده توسط  $\phi(2 \cdot)$  است، یافتن  $\Psi \subset V_1$  همانند یافتن  $h_l$  است به طوری که

$$\psi_l(x) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_l(k) \phi(2x - k). \quad (20-2)$$

دنباله های  $h_1, \dots, h_r$  ماسک های موجک یا فیلترهای بالا گذر دستگاه نامیده می شوند، همچنین ماسک نظریف  $h_0$  به صورت فیلتر پایین گذر نیز شناخته می شود. در حوزه فوریه، (۲۰-۲) را به صورت زیر می توان

<sup>۱</sup>Canonical tight frame coefficients      <sup>۲</sup>Wavelet frame

نوشت

$$\hat{\psi}_l(\cdot) = \hat{h}_l \hat{\phi}, \quad l = 1, \dots, r, \quad (21-2)$$

که  $\hat{h}_1, \dots, \hat{h}_r$  توابع  $2\pi$ -دوره ای هستند. در سرتاسر این قسمت فرض شده است که  $\phi$  و ماسک های  $\{h_l, l = 0, 1, \dots, r\}$  در فرضیات زیر صدق می کنند.

**فرضیات ۲-۳-۴.** اکنون فرض می کنیم برای MRA مفروض فرضیات زیر برقرار باشند:

(۱) هر ماسک  $\{h_l, l = 0, 1, \dots, r\}$  یک دنباله در  $l^2(\mathbb{Z})$  بوده و سری فوریه اش  $(\hat{h}_l)$  اندازه پذیر و کراندار کلی باشد.

(۲) برای ماسک نظریف  $h_0$  با تابع نظریف پذیر  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$  رابطه

$$|\hat{h}_0(\xi) - 1| \leq C|\xi|$$

برقرار است.

(۳) تابع  $[\hat{\phi}, \hat{\phi}] := \sum_{k \in 2\pi\mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\cdot + k)|^2$  کراندار کلی است.

**قضیه ۲-۳-۵.** [۸] (اصل توسعه یکانی (UEP))<sup>۱</sup>. فرض کنید  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$  تابعی نظریف پذیر با ماسک نظریف  $h_0$  و  $\{h_1, \dots, h_r\}$  مجموعه از دنباله ها باشد. اگر فرضیات ۲-۳-۴ برای تابع نظریف پذیر  $\phi$  و ماسک های  $\{h_0, \dots, h_r\}$  برقرار باشد، آنگاه دستگاه  $X(\Psi)$  که  $\Psi = \{\psi_1, \dots, \psi_r\}$  تعریف شده در (۲-۲۰) قاب چسبانی را در  $L^2(\mathbb{R})$  تشکیل می دهد که تساوی های زیر را برقرار می سازد

$$\sum_{l=0}^r |\hat{h}_l(\xi)| = 1, \quad \sum_{l=0}^r \hat{h}_l(\xi) \overline{\hat{h}_l(\xi + \pi)} = 0 \quad (22-2)$$

که تقریباً برای همه  $\xi \in \sigma(V_0)$  برقرار است، به طوری که

$$\sigma(V_0) := \{\xi \in \mathbb{R} : [\hat{\phi}, \hat{\phi}](\xi) \neq 0\}. \quad (23-2)$$

علاوه بر این، با فرض  $r = 1$  و  $\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$  آن گاه  $X(\Psi)$  پایه موجک متعامد  $L^2(\mathbb{R})$  است.

<sup>۱</sup>Unitary extension principle

ابتدا توجه کنیم که بنا به UEP برای ماسک  $h_0$  داریم

$$|\hat{h}_0(\xi)|^2 + |\hat{h}_0(\xi + \pi)|^2 \leq 1. \quad (24-2)$$

درحقیقت، شرط UEP(22-2) به این معنی است که ماتریس زیر دو ردیف متعامد بر هم دارد

$$\begin{pmatrix} \hat{h}_0(\xi), & \hat{h}_1(\xi), & \dots, & \hat{h}_r(\xi) \\ \hat{h}_0(\xi + \pi), & \hat{h}_1(\xi + \pi), & \dots, & \hat{h}_r(\xi + \pi) \end{pmatrix} \quad a.e. \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

در این صورت ماتریس بالا را می توان به یک ماتریس یکانی  $(r+1) \times (r+1)$  گسترش داد. در حقیقت ستون اول ماتریس توسعه یافته دارای نرم یک است که نامساوی (24-2) را ایجاب می کند.

شرایط (24-2) می تواند به صورت جمله هایی از دنباله های  $\{h_0, h_1, \dots, h_r\}$  نوشته شود. شرط اول به

صورت

$$\sum_{l=0}^r \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{h_l(k)} h_l(k-p) = \delta_{p,0}, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad (25-2)$$

که  $\delta_{p,0} = 1$  وقتی  $p = 0$  و در بقیه نقاط  $p \neq 0$  و شرط دوم را به صورت زیر می توان نوشت

$$\sum_{l=0}^r \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^{k-p} \overline{h_l(k)} h_l(k-p) = 0, \quad p \in \mathbb{Z}. \quad (26-2)$$

قبل از اثبات قضیه (2-3-5)، ابتدا لم زیر را ثابت می کنیم. لم زیر را در حوزه فوریه ثابت خواهیم کرد. همچنین

اثبات دیگری از لم را در حوزه زمان با برخی از مفروضات اضافی بیان می کنیم.

برای  $\phi$  داده شده و MRA متناظر با آن  $\{V_n\}$ ، عملگر درونیایی کوشی برای  $f \in L^2(\mathbb{R})$  دلخواه به صورت

زیر تعریف می شود

$$\mathcal{P}_n : f \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_{n,k} \rangle \phi_{n,k}. \quad (27-2)$$

لم 2-3-6. فرض کنید  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$  تابعی نظریف پذیر با ماسک  $h_0$  باشد. فرض کنید  $\{h_0, h_1, \dots, h_r\}$

مجموعه دنباله هایی باشد که در (22-2) (یا معادلاً در (25-2) و (26-2)) و فرض های 2-3-4 صدق می

کند. در این صورت

$$\mathcal{P}_n f = \mathcal{P}_{n-1} f + \sum_{l=1}^r \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{l,n-1,k} \rangle \psi_{l,n-1,k}. \quad (28-2)$$

برهان. برای سادگی نمادها، فرض کنید  $\phi$  مانند  $\psi$  تعریف شده باشد و

$$\mathcal{P}_{n,l} f := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{l,n,k} \rangle \psi_{l,n,k},$$

برای  $l = 0, 1, \dots, r$ . توجه کنید  $\mathcal{P}_{n,0} = \mathcal{P}_n$ . بنا مفروضات ۲-۳-۴، دستگاه  $\{\psi_{l,n,k}; k \in \mathbb{Z}\}$  برای هر  $l$  و  $n$ ، دستگاهی بسط را تشکیل می دهد. لذا عملگر  $\mathcal{P}_{n,l}: L^2(\mathbb{R}) \mapsto L^2(\mathbb{R})$  خوشتعریف است. بنابراین، (۲۸-۲) معادل است با

$$\widehat{\mathcal{P}_n f} = \sum_{l=0}^r \widehat{\mathcal{P}_{n-1,l} f}. \quad (29-2)$$

از آن جا که  $\mathcal{P}_{n,l} = D^n \mathcal{P}_{0,l} D^{-n}$ ، کافی است (۲۹-۲) را برای  $n = 1$  نشان دهیم، یعنی

$$\widehat{\mathcal{P}_1 f} = \sum_{l=0}^r \widehat{\mathcal{P}_{0,l} f}. \quad (30-2)$$

بنا به گزاره ۲-۲-۱ قسمت (۳)، (۳۰-۲) معادل است با

$$[\hat{f}(2\cdot), \hat{\phi}(\frac{\cdot}{2})] \hat{\phi}(\frac{\cdot}{2}) = \sum_{l=0}^r [f, \hat{\psi}_l] \hat{\psi}_l. \quad (31-2)$$

در حقیقت، چون  $\hat{\psi}_l = \hat{h}_l(\frac{\cdot}{2}) \hat{\phi}(\frac{\cdot}{2})$ ، لذا داریم

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^r [f, \hat{\psi}_l] \hat{\psi}_l &= \sum_{l=0}^r [f, \hat{h}_l(\frac{\cdot}{2}) \hat{\phi}(\frac{\cdot}{2})] \hat{h}_l(\frac{\cdot}{2}) \hat{\phi}(\frac{\cdot}{2}) \\ &= \sum_{l=0}^r \left( \overline{\hat{h}_l(\frac{\cdot}{2})} [\hat{f}(2\cdot), \hat{\phi}(\frac{\cdot}{2})] + \overline{\hat{h}_l(\frac{\cdot}{2} + \pi)} [\hat{f}(2\cdot), \hat{\phi}(\frac{\cdot}{2} + \pi)] \right) \hat{h}_l(\frac{\cdot}{2}) \hat{\phi}(\frac{\cdot}{2}) \\ &= \sum_{l=0}^r |\hat{h}_l(\frac{\cdot}{2})|^2 [\hat{f}(2\cdot), \hat{\phi}(\frac{\cdot}{2})] \hat{\phi}(\frac{\cdot}{2}) + \sum_{l=0}^r \hat{h}_l(\frac{\cdot}{2}) \overline{\hat{h}_l(\frac{\cdot}{2} + \pi)} [\hat{f}(2\cdot), \hat{\phi}(\frac{\cdot}{2} + \pi)] \hat{\phi}(\frac{\cdot}{2}) \\ &= [\hat{f}(2\cdot), \hat{\phi}(\frac{\cdot}{2})] \hat{\phi}(\frac{\cdot}{2}). \end{aligned}$$

قسمت آخر رابطه بالا از (۲۲-۲) برای  $\frac{\xi}{\nu}$  نتیجه می شود. در حقیقت وقتی  $\frac{\xi}{\nu} \notin \sigma(V_0)$  آن گاه  $\hat{\phi}(\frac{\xi}{\nu})$ . لذا اثبات  
 □  
 لم نتیجه می شود.

لم ۲-۳-۷. فرض کنید تابع نظریف پذیر  $\phi \in L^{\nu}(\mathbb{R})$  برای فرضیات ۲-۳-۴ برقرار باشد و عملگر  $\mathcal{P}_n$  به  
 وسیله (۲۷-۲) تعریف شده باشد. آن گاه برای همه  $f \in L^{\nu}(\mathbb{R})$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \mathcal{P}_n f = 0.$$

برهان. از قسمت (۱) گزاره ۱-۲-۲ داریم

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}_n f\|_{L^{\nu}(\mathbb{R})}^{\nu} &\leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}} | \langle f, \phi_{n,k} \rangle |^{\nu} \\ &\leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^{\nu} \phi(\nu^n x - k) dx \right)^{\nu}. \end{aligned}$$

اگر  $f$  در بازه  $[-R, R]$  محدود شده باشد، آن گاه بنا به نامساوی کوشی-شوارتز داریم،

$$\|\mathcal{P}_n f\|_{L^{\nu}(\mathbb{R})}^{\nu} \leq C \|f\|_{L^{\nu}(\mathbb{R})}^{\nu} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\{\nu^n[-R, R] - k\}} |\phi(x)|^{\nu} dx.$$

حال اگر  $n < 0$  و  $|n|$  به اندازه کافی بزرگ باشد، داریم

$$\{\nu^n[-R, R] - k_1\} \cap \{\nu^n[-R, R] - k_2\} = \emptyset, \quad k_1 \neq k_2.$$

بنابراین،

$$\|\mathcal{P}_n f\|_{L^{\nu}(\mathbb{R})}^{\nu} \leq C \|f\|_{L^{\nu}(\mathbb{R})}^{\nu} \int_{E_n} |\phi(x)|^{\nu} dx = C \|f\|_{L^{\nu}(\mathbb{R})}^{\nu} \int_{\mathbb{R}} \chi_{E_n} |\phi(x)|^{\nu} dx,$$

که

$$E_n = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (\nu^n[-R, R] - k).$$

چون وقتی  $n \rightarrow -\infty$  برای تقریباً هر  $x \in \mathbb{R}$ ،  $\chi_{E_n} |\phi(x)|^{\nu} \rightarrow 0$  و  $\chi_{E_n} |\phi(x)|^{\nu} \leq |\phi(x)|^{\nu} \in L^{\nu}(\mathbb{R})$

لذا بنابه قضیه همگرایی غالب<sup>۱</sup> داریم

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}^p \int_{\mathbb{R}} \chi_{E_n} |\phi(x)|^p dx = \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}^p \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow -\infty} \chi_{E_n} |\phi(x)|^p dx = 0.$$

لذا

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \|\mathcal{P}_n f\|_{L^p(\mathbb{R})}^p = 0,$$

برای همه  $f \in L^p(\mathbb{R})$  با تکیه گاه فشرده برقرار است. بنابه برهان چگالی استاندارد و توجه به اینکه  $\mathcal{P}_n$  برای هر  $n$  کراندار است، می توانیم نتیجه بگیریم که برای همه  $f \in L^p(\mathbb{R})$  داریم  $\lim_{n \rightarrow -\infty} \mathcal{P}_n f = 0$ .  $\square$

لم ۲-۳-۸. فرض کنید تابع نظریف پذیر  $\phi \in L^p(\mathbb{R})$  برای فرضیات ۲-۳-۴ برقرار باشد و عملگر  $\mathcal{P}_n$  به وسیله (۲-۲۷) تعریف شده باشد. آن گاه برای همه  $f \in L^p(\mathbb{R})$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}_n f = f.$$

برهان. این لم را با نشان دادن موارد زیر اثبات می کنیم. برای هر  $f \in L^p(\mathbb{R})$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathcal{P}_n f, f \rangle = \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}^p. \quad (۲-۳۲)$$

و برای  $n \in \mathbb{Z}$

$$\|\mathcal{P}_n\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq 1. \quad (۲-۳۳)$$

بار دیگر (۲-۳۲) و (۲-۳۳) ساخته شدند، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{P}_n f - f\|_{L^p(\mathbb{R})}^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{P}_n f\|_{L^p(\mathbb{R})}^p - 2 \langle \mathcal{P}_n f, f \rangle + \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}^p \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{P}_n f\|_{L^p(\mathbb{R})}^p - \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}^p \leq 0, \end{aligned}$$

که اثبات این لم را نتیجه خواهد داد.

حال (۲-۳۲) را نشان می دهیم، که اثباتش مشابه لم ۳.۲.۱۱ مرجع [۱] می باشد. بر طبق استدلال های معمول در نظریه تقریب، کافی است برای همه  $f \in L^p(\mathbb{R})$  با  $\hat{f}$  پیوسته و تکیه گاه فشرده، (۲-۳۲) را ثابت کنیم.

<sup>۱</sup>Dominated convergence theorem

بنا به اثبات مشابه قسمت (۲) گزاره ۲-۲-۱، می توان نشان داد که  $[D^n \hat{f}, \hat{\phi}]$  سری فوریه ای از  $\{ \langle f, \phi_{n,k} \rangle : k \in \mathbb{Z} \}$  برای هر  $n \in \mathbb{Z}$  است. از آنجا که  $\hat{f}$  پیوسته و با تکیه گاه فشرده است، مجموعه نامتناهی

$$[D^n \hat{f}, \hat{\phi}] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (D^n \hat{f})(\xi + 2k\pi) \overline{\hat{\phi}(\xi + 2k\pi)}$$

در واقع متناهی است. همچنین کرانداری  $\hat{f}$  ایجاب می کند  $[D^n \hat{f}, \hat{\phi}] \in L^2([-\pi, \pi])$ . حال بنا به اتحاد پارسوال داریم

$$\langle \mathcal{P}_n f, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \| [D^n \hat{f}, \hat{\phi}] \|_{L^2([-\pi, \pi])}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} (D^n \hat{f})(\xi + 2k\pi) \overline{\hat{\phi}(\xi + 2k\pi)} \right|^2 d\xi.$$

چون  $\hat{f}$  با تکیه گاه فشرده است، هرگاه  $n$  به اندازه کافی بزرگ باشد، داریم

$$\langle \mathcal{P}_n f, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |(D^n \hat{f})(\xi) \hat{\phi}(\xi)|^2 d\xi.$$

از آنجا که قسمت (۲) از فرضیات ۲-۳-۴ ایجاب می کند که  $\lim_{\xi \rightarrow 0} \hat{\phi}(\xi) = 1$  در این صورت برای هر  $\epsilon > 0$  وجود دارد  $r \in (0, \pi)$  به طوری که  $1 - \epsilon \leq |\hat{\phi}(\xi)|^2 \leq 1 + \epsilon$  برای  $\xi \in [-r, r]$  برقرار است. علاوه بر این، هرگاه  $n$  به اندازه کافی بزرگ باشد،  $D^n \hat{f}$  تکیه گاهی در  $[-r, r]$  دارد. بنابراین داریم

$$\langle \mathcal{P}_n f, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r |(D^n \hat{f})(\xi) \hat{\phi}(\xi)|^2 d\xi$$

ولذا

$$\frac{1-\epsilon}{2\pi} \|D^n \hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq \langle \mathcal{P}_n f, f \rangle \leq \frac{1+\epsilon}{2\pi} \|D^n \hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

حال (۲-۳۲) بنا به  $\frac{1}{2\pi} \|D^n \hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$  نتیجه می شود.

بنابراین قسمت (۳) گزاره ۲-۲-۱ کافی است ثابت کنیم  $[\hat{\phi}, \hat{\phi}] \leq 1$  تقریباً همه جا روی  $[-\pi, \pi]$  برقرار است. دنباله توابع  $\{\phi_n\}_n$  را به صورت

$$\hat{\phi}_n(\xi) := \hat{h}_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\phi}_{n-1}\left(\frac{\xi}{2}\right) = \prod_{j=1}^n \hat{h}_0(2^{-j}\xi) \hat{\phi}_0(2^{-n}\xi),$$

تعریف می کنیم، که  $\hat{\phi}_0 := \chi_{[-\pi, \pi]}$  واضح است که  $1 \leq [\hat{\phi}_0, \hat{\phi}_0]$ ، بنابه استقراء داریم

$$\begin{aligned}
 [\hat{\phi}_n, \hat{\phi}_n](\xi) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{h}_0(\frac{\xi}{\nu} + k\pi)|^2 |\hat{\phi}_{n-1}(\frac{\xi}{\nu} + k\pi)|^2 \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{h}_0(\frac{\xi}{\nu} + 2k\pi)|^2 |\hat{\phi}_{n-1}(\frac{\xi}{\nu} + 2k\pi)|^2 \\
 &\quad + \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{h}_0(\frac{\xi}{\nu} + 2k\pi + \pi)|^2 |\hat{\phi}_{n-1}(\frac{\xi}{\nu} + k\pi + \pi)|^2 \\
 &= |\hat{h}_0(\frac{\xi}{\nu})|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}_{n-1}(\frac{\xi}{\nu} + 2k\pi)|^2 \\
 &\quad + |\hat{h}_0(\frac{\xi}{\nu} + \pi)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}_{n-1}(\frac{\xi}{\nu} + 2k\pi + \pi)|^2 \\
 &\leq |\hat{h}_0(\frac{\xi}{\nu})|^2 + |\hat{h}_0(\frac{\xi}{\nu} + \pi)|^2 \\
 &\leq 1, \quad a.e. \xi \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

نامساوی آخر از  $1 \leq |\hat{h}_0(\frac{\xi}{\nu})|^2 + |\hat{h}_0(\frac{\xi}{\nu} + \pi)|^2 \leq 1$  نتیجه می شود. بنابه مورد (۲) از فرضیات ۲-۳-۴،  $\hat{\phi}_n$  همگرای نقطه ای است به  $\phi$ . طبق لم فاتو<sup>۱</sup> داریم

$$[\hat{\phi}, \hat{\phi}] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} [\hat{\phi}_n, \hat{\phi}_n] \leq 1, \quad a.e. \xi \in \mathbb{R}$$

□

که این اثبات (۲-۳۳) را نتیجه می دهد.

برهان. (اثبات قضیه ۲-۳-۵) بنابه (۲-۲۸) داریم

$$\mathcal{P}_n f = \mathcal{P}_{n-1} f + \sum_{l=1}^r \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{l, n-1, k} \rangle \psi_{l, n-1, k}$$

با استقراء روی (۲-۲۸)، داریم

$$\mathcal{P}_n f = \mathcal{P}_{n'} f + \sum_{l=1}^r \sum_{j=n'}^{n-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{l, j, k} \rangle \psi_{l, j, k}.$$

---

<sup>۱</sup>Fatou's lemma



با فرض  $n' \rightarrow -\infty$  و بکارگیری لم ۲-۳-۷ داریم

$$\mathcal{P}_n f = \sum_{l=1}^r \sum_{j < n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{l,j,k} \rangle \psi_{l,j,k}. \quad (۳۴-۲)$$

سپس در هر دو طرف (۳۴-۲)،  $n \rightarrow \infty$  می گیریم. توجه کنید که (۲۴-۲) بنابه (۲۲-۲) برقرار است، و با بکار بردن لم ۲-۳-۸، برای همه  $f \in L^2(\mathbb{R})$  داریم

$$f = \sum_{l=1}^r \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{l,n,k} \rangle \psi_{l,n,k}.$$

که این ثابت می کند  $X(\Psi)$  قاب چسبان برای  $L^2(\mathbb{R})$  است.

سرانجام نشان می دهیم اگر  $r = 1$  و  $\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$  (یا معادلاً  $\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R})} = 2\pi$ )، آن گاه  $X(\Psi)$  پایه متعامدی را برای  $L^2(\mathbb{R})$  تشکیل می دهد. با استفاده از (۲۲-۲)،  $\hat{\phi}(2\cdot) = \hat{h}_0 \hat{\phi}$  و  $\hat{\psi}(2\cdot) = \hat{h}_1 \hat{\psi}$  داریم

$$\begin{aligned} \|\hat{\psi}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= 2 \int |\hat{\psi}(2\xi)|^2 d\xi = 2 \int |\hat{h}_1(\xi)|^2 |\hat{\phi}(\xi)|^2 d\xi \\ &= 2 \int (1 - |\hat{h}_0(\xi)|^2) |\hat{\phi}(\xi)|^2 d\xi \\ &= 4\pi - 2 \int |\hat{\phi}(2\xi)|^2 d\xi \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

که این ثابت می کند  $\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$  و لذا برای همه  $n, k \in \mathbb{Z}$  داریم  $\|\psi_{n,k}\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$ . از آنجا که  $X(\psi)$  قاب چسبانی برای  $L^2(\mathbb{R})$  است، لذا برای هر  $h \in X(\psi)$  داریم

$$\|h\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \sum_{g \in X(\psi)} |\langle h, g \rangle|^2 = \sum_{g \in X(\psi), g \neq h} |\langle h, g \rangle|^2 + \|h\|_{L^2(\mathbb{R})}^2,$$

که ایجاب می کند

$$\sum_{g \in X(\psi), g \neq h} |\langle h, g \rangle|^2 = 0, \quad \forall h \in X(\psi).$$

بنابراین،  $\langle h, g \rangle = 0$  هرگاه  $h \neq g$ ، لذا  $X(\psi)$  تشکیل پایه متعامد برای  $L^2(\mathbb{R})$  می دهد.  $\square$

معمولاً برای تجزیه، تابع داده شده را به جای منفی بی نهایت، تا حد خاصی پایین آوریم. نتیجه بعدی بیان

می کند که دستگاه  $\{\phi_{L,k}, \psi_{l,n,k} : 1 \leq l \leq r, n \geq L, k \in \mathbb{Z}\}$  تشکیل قاب چسبان برای  $L^2(\mathbb{R})$  می دهد، اگر تابعی تا حد متناهی  $L$  تجزیه شده باشد. اثبات این نتیجه مستقیماً از (۲-۳۴) و این که قاب چسبان برای  $L^2(\mathbb{R})$  است، به دست می آید.

نتیجه ۲-۳-۹. فرض کنید  $\Psi = \{\psi_l : 1 \leq l \leq r\}$  مجموعه ای از موجک قاب های چسبان ساخته شده با  $UEP$  با تابع نظریف پذیر متناظر  $\phi$  باشد. آن گاه برای هر  $L \in \mathbb{Z}$  داده شده، دستگاه

$$X(\phi, \Psi; L) := \{\phi_{L,k}, \psi_{l,n,k} : 1 \leq l \leq r, n \geq L, k \in \mathbb{Z}\}$$

قاب چسبانی در  $L^2(\mathbb{R})$  تشکیل می دهد، یعنی برای هر  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ،

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_{L,k} \rangle \phi_{L,k} + \sum_{l=1}^r \sum_{n \geq L} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{l,n,k} \rangle \psi_{l,n,k}.$$

## فصل ۳

# بانک صافی و بازیابی اطلاعات

برای تحلیل، رمز گذاری، بازسازی سیگنال‌ها و نظیر آن، به عملگرهای ویژه‌ای روی سیگنال‌ها نیازمندیم. در بین این عملگرها، صافی‌ها یکی از مهمترین آن‌ها هستند. در این قسمت صافی‌های خطی را معرفی می‌کنیم، که عملگرهایی پیچشی روی  $l^2$  هستند. ابتدا پایه طبیعی در  $l^2$  را معرفی می‌کنیم. فرض کنید  $\delta_k = (\delta_{k,j})_{j \in \mathbb{Z}}$ ، همه جا به جز مولفه  $k$  ام صفر بوده و مقدار این مولفه ۱ باشد. در این صورت  $\{\delta_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  پایه متعامد یکه در  $l^2$  است. هر  $x \in l^2$  را می‌توان به صورت

$$x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(k) \delta_k$$

نمایش داد. در پردازش سیگنال،  $\delta_k$  را ضربه واحد در زمان  $k$  گوئیم. عملگر  $S$  روی  $l^2$  را عملگر انتقال (یا عملگر زمان-تاخیر) نامیم اگر

$$(Sx)(n) = x(n-1), \quad x \in l^2$$

عملگر  $T$  روی  $l^2$  را زمان-پایا گوئیم هرگاه  $ST = TS$ ، عملگر  $T$  روی  $l^2$  عملگر خطی نامیده می‌شود اگر برای هر  $x \in l^2$

$$Tx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(k) T \delta_k.$$

هر عملگر خطی زمان-پایا را یک صافی گوئیم. اگر  $F$  یک صافی باشد، آن گاه  $Fx$  را پاسخ  $x$  می‌نامیم.

## ۱-۳ بانک صافی

برای پردازش سیگنال‌ها و تصاویر از صافی‌ها و عملگر پیچش استفاده می‌شود که در این بخش انواع صافی‌ها را تعریف کرده و یک بانک صافی می‌سازیم و به کمک این بانک صافی و عملگر پیچش، تصویر مورد نظر را حذف نویز می‌کنیم.

تعریف ۱-۳-۱. پیچش<sup>۱</sup> (گسسته) روی دو دنباله  $h$  و  $x$ ، دنباله‌ای به صورت  $h * x$  است که

$$(h * x)(n) = \sum_k h(k)x(n-k), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (1-3)$$

مشروط بر این که سری (۱-۳) برای هر  $n \in \mathbb{Z}$  همگرا باشد.

قضیه زیر صافی بودن یک دنباله را معرفی می‌کند.

قضیه ۱-۳-۲.  $H$  یک صافی است اگر و فقط اگر دنباله‌ای چون  $h$  وجود داشته باشد به طوری که  $Hx = h * x$ .

□

برهان. اثبات در قضیه ۱.۲.۹ از مرجع [۱۵] بیان شده است.

از آنجا که یک صافی را می‌توان با یک دنباله مشخص کرد، به طور مستقیم این دنباله  $h$  را یک صافی می‌نامیم. از نقطه نظر محاسباتی، صافی‌های متناهی مطلوب هستند.

تعریف ۱-۳-۳. اگر  $h$  متناهی باشد آن گاه  $h$  را یک صافی پاسخ ضربه متناهی<sup>۲</sup> ( $FIR$ )<sup>۲</sup> گوئیم. در غیر این صورت آن را یک صافی پاسخ ضربه نامتناهی<sup>۳</sup> ( $IIR$ )<sup>۳</sup> می‌نامیم. صافی  $h$  با  $h(n) = 0$  برای هر  $n < 0$ ، صافی سببی نامیده می‌شود.

لم زیر یک شرط لازم و کافی برای صافی روی  $l^2$  ارائه می‌دهد. برای برهان آن صفحه ۳۸۸ مرجع [۱۵] را ببینید.

لم ۱-۳-۴. اگر  $h \in l^2$ ، آن گاه  $h$  یک صافی از  $l^2$  به  $l^2$  است و برای  $x \in l^2$ ،

$$\|h * x\|_2 \leq \|h\|_2 \|x\|_2.$$

<sup>۱</sup>Covolution

<sup>۲</sup>Finite Impulse Response

<sup>۳</sup>Infinite Impulse Response

مثال ۳-۱-۵. صافی میانگین حرکت،  $h_0$ ، به صورت زیر تعریف می شود

$$h_0(0) = h_0(1) = \frac{1}{4}, \quad h_0(k) = 0, \quad k \neq 0, 1.$$

اگر

$$x = (\dots, 0, 1, 2, 1, 0, \dots) \quad (2-3)$$

و  $y = h_0 * x$ ، آن گاه  $y(n) = \frac{1}{4}(x(n) + x(n-1))$  و  $y = \frac{1}{4}(\dots, 0, 1, 3, 3, 1, 0, \dots)$ .

مثال ۳-۱-۶. صافی تفاضل حرکت،  $h_1$ ، به صورت

$$h_1(0) = \frac{1}{4}, \quad h_1(1) = -\frac{1}{4}, \quad h_1(k) = 0, \quad k \neq 0, 1$$

تعریف شده است. فرض کنید  $x$  سیگنال (۲-۳) باشد و  $z = h_1 * x$  در این صورت

$$z = \frac{1}{4}(\dots, 0, 1, 1, -1, -1, \dots) \quad \text{و} \quad z(n) = \frac{1}{4}(x(n) - x(n-1))$$

دنباله  $\delta$  صافی همانی است زیرا  $\delta * x = x$ . عملگر انتقال  $S$  نیز یک صافی به نام صافی انتقال است و

$$Sx = \delta_1 * x$$

### ۳-۱-۱ نمایش صافی ها در دامنه زمانی

صافی ها بر روی سیگنال اثر می گذارند لذا ابتدا مفهوم سیگنال را بیان می کنیم.

سیگنال گسسته (یا به اختصار سیگنال) یک دنباله عددی است. فرض می کنیم هر سیگنال  $x = (x(n))_{n=-\infty}^{\infty} \in \mathcal{L}^2$

است که آن را سیگنال با انرژی متناهی می نامیم. در این جا  $\|x\|_2$ ، انرژی  $x$  نامیده می شود. اگر  $x$  تعداد

متناهی جمله ناصفر داشته باشد، آن را سیگنال متناهی گوئیم.

$z$ -تبدیل سیگنال  $x$ ، سری لورن  $X(z) = \sum_n x(n)z^n$  است. نماد ریاضی ساده شده (یا صورت فوریه)

$z$ -تبدیل  $x$ ،

$$X(\omega) = \sum_n x(n)e^{-in\omega}, \quad z = e^{-i\omega}$$

است که نما  $x$  نیز نامیده می شود.

در دامنه زمانی، یک صافی به صورت یک ماتریس تاپلیتز<sup>۱</sup> است.

تعریف ۳-۱-۷. ماتریس  $T_h$  را یک ماتریس تاپلیتز وابسته به دنباله  $h$  می نامیم اگر به صورت زیر باشد،

$$T_h = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & h(0) & h(-1) & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & h(1) & h(0) & h(-1) & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & h(1) & h(0) & h(-1) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & h(1) & h(0) & h(-1) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & h(1) & h(0) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

اگر  $x = (\dots, x(-1), x(0), x(1), \dots)$  آن گاه  $h * x = T_h x$ .

مثال ۳-۱-۸. صافی میانگین حرکت  $h_0$  به صورت  $y(n) = \frac{1}{2}(x(n) + x(n-1))$  می باشد. این صافی را

همچنین می توانیم به صورت

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ y(-1) \\ y(0) \\ y(1) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ x(-1) \\ x(0) \\ x(1) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

نمایش می دهیم. به طور مشابه صافی تفاضل حرکت  $h_1$  نمایش داده شده با  $z(n) = \frac{1}{2}(x(n) - x(n-1))$

را می توان به صورت

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ z(-1) \\ z(0) \\ z(1) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ x(-1) \\ x(0) \\ x(1) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

<sup>۱</sup>Toeplitz

نمایش داد.

### ۲-۱-۳ صافی‌ها در دامنه فرکانسی

با به کار بردن  $z$ -تبدیل سیگنال‌های  $l^2$ ، در دامنه فرکانسی می‌توان نمایش صافی‌ها را به دست آورد. قضیه پیش‌گسسته زیر نقشی محوری در این مورد ایفا می‌کند. اثبات این قضیه در مرجع [۱۵] بیان شده است.

قضیه ۹-۱-۳. (قضیه پیش‌گسسته) فرض کنید  $h$  یک صافی باشد و

$$y = h * x$$

در این صورت  $Y(z) = H(z)X(z)$  و یا با نماد ریاضی ساده شده

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega). \quad (۳-۳)$$

بنا بر قضیه پیش‌گسسته، می‌توانیم صافی‌های  $l^2$  را توصیف کنیم.

قضیه ۱۰-۱-۳. صافی  $h$  یک عملگر کراندار از  $l^2$  به  $l^2$  است اگر و تنها اگر  $H(\omega) \in L^\infty$ .

□

برهان. اثبات در مرجع [۱۵] بیان شده است.

مثال ۱۱-۱-۳. فرض کنید  $h_0$  صافی میانگین حرکت و  $x$  سیگنال مثال ۳-۱-۵ باشد. لذا

$$H_0(z) = \frac{1}{4}(1+z), \quad X(z) = 1 + 2z + z^2$$

و

$$Y(z) = H_0(z)X(z) = \frac{1}{4}(1 + 3z + 3z^2 + z^3)$$

که موجب می‌شود  $y = \frac{1}{4}(\dots, 0, 1, 3, 3, 1, \dots)$ . حال اگر  $h_1$  صافی تفاضل حرکت باشد، آن‌گاه  $H_1(z) = \frac{1}{4}(1-z)$  و  $Z(z) = H_1(z)X(z) = \frac{1}{4}(1+z-z^2-z^3)$ ، که نتیجه می‌دهد

$$z = \frac{1}{4}(\dots, 0, 1, 1, -1, -1, \dots).$$

### ۳-۱-۳ صافی های بالا گذر و پایین گذر

صافی ها اغلب برای استخراج مولفه های فرکانسی مورد نظر از سیگنال ها به کار می روند. برای مثال، مولفه های با فرکانس بالای یک سیگنال معمولاً شامل پارازیت و نوسانات شدید هستند، که اغلب مجبوریم آن ها را از سیگنال حذف کنیم، صافی های پایین گذر و بالا گذر را برای تجزیه سیگنال ها به حدود فرکانسی شان استفاده می کنیم. یک صافی پایین گذر، مولفه های فرکانس بالای سیگنال را کاهش می دهد، در حالی که صافی بالا گذر عکس این عمل را انجام می دهد. از آن جا که یک سیگنال نمایش دهنده یک سیگنال فرکانس - محدود با پهنای باند  $|\omega| \leq \pi$  است، دامنه پایین فرکانس آن در اطراف صفر متمرکز شده است و ناحیه فرکانس بالای آن نزدیک  $\pi$  است. برای مثال می توانیم دامنه فرکانسی را به دو ناحیه تقسیم کنیم:  $|\omega| \leq \frac{\pi}{4}$  و  $\frac{\pi}{4} < |\omega| \leq \pi$ ، که اولی ناحیه پایین فرکانس و دومی ناحیه فرکانس بالا است. بنابر این ساده ترین زوج صافی های پایین گذر و بالا گذر به صورت زیر تعریف می شود.

تعریف ۳-۱-۱۲. صافی پایین گذر مطلوب  $h = h(k)$  به صورت

$$H(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) e^{ik\omega} = \begin{cases} 1, & |\omega| < \frac{\pi}{4} \\ 0, & \frac{\pi}{4} \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

تعریف می شود و صافی بالا گذر مطلوب  $g = g(k)$  با

$$G(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(k) e^{ik\omega} = \begin{cases} 0, & |\omega| < \frac{\pi}{4} \\ 1, & \frac{\pi}{4} \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

تعریف می شود.

فرض کنیم  $H$  یک صافی با نماد پیوسته  $H(\omega)$  باشد. اگر  $H$  یک صافی پایین گذر باشد آن گاه فرض می کنیم  $H(0) \neq 0$  و  $H(\pi) = 0$ . همچنین واضح است که اگر  $H$  یک صافی پایین گذر باشد، آن گاه صافی  $G$  با نماد  $G(\omega) = H(\omega + \pi)$ ، یک صافی بالا گذر است. زیرا نمودار  $|G(\omega)|$  از انتقال  $H(\omega)$  با  $\pi$  به دست آمده است.

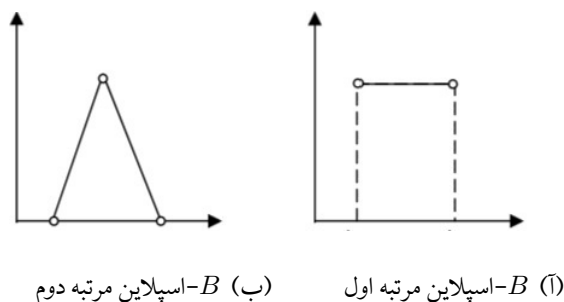


### ۳-۱-۴ قاب چسبان $B$ -اسپلاین

اسپلاین ها توابع به طور قطعه ای<sup>۱</sup> چند جمله ای هستند. از آن جا که اسپلاین ها از چند جمله ای ها انعطاف پذیر ترند، ابزار مهمی در آنالیز عددی و دیگر حوزه ها به شمار می آیند.  $B$ -اسپلاین های اصلی، اسپلاین های تعریف شده روی افراز های یکنواخت با حداقل تکیه گاه هستند. در واقع  $B$ -اسپلاین اصلی از درجه یک همان تابع مشخصه است یعنی  $B_1 = \chi_{[0,1]}$  همچنین  $B$ -اسپلاین مرتبه دوم به وسیله پیچش از مرحله قبل به دست می آید به طوریکه داریم

$$B_2 = B_1 * B_1 = \chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]}.$$

در شکل ۳-۱-۳ منحنی این دو  $B$ -اسپلاین را ملاحظه می کنید.



شکل ۳-۱-۳:  $B$ -اسپلاین

تعریف ۳-۱-۱۳. یک  $B$ -اسپلاین اصلی از مرتبه  $m$ ، که با  $B_m(x)$  نمایش داده می شود به استقرا توسط ضرب پیچشی به صورت زیر تعریف می شود

$$B_1(x) = \chi_{[0,1]}, \quad B_m(x) = B_{m-1} * B_1(x) = \int_0^1 B_{m-1}(x-t)dt,$$

یعنی

$$B_m(x) = \overbrace{B_1 * B_1 * \dots * B_1}^m.$$

$B$ -اسپلاین مرتبه  $m$  را در نظر بگیرید. ماسک نظریف متناظر آن به صورت زیر می باشد،  
 $\hat{h}_0(\xi) = e^{-ij\xi} \cos^m(\frac{\xi}{2})$  که هرگاه  $m$  زوج باشد،  $j=0$  و هرگاه  $m$  فرد باشد  $j=1$ . ماسک های موجک  $m$

<sup>۱</sup>Piecewise

را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\hat{h}_l(\xi) := -i^l e^{-ij\frac{\xi}{\gamma}} \sqrt{\binom{m}{l}} \sin^l\left(\frac{\xi}{\gamma}\right) \cos^{m-l}\left(\frac{\xi}{\gamma}\right) \quad l = 1, 2, \dots, m.$$

فرضیات ۲-۳-۴ برقرار است، همچنین داریم

$$\sum_{l=0}^m |\hat{h}_l(\xi)|^2 = (\cos^2\left(\frac{\xi}{\gamma}\right) + \sin^2\left(\frac{\xi}{\gamma}\right))^m = 1$$

و

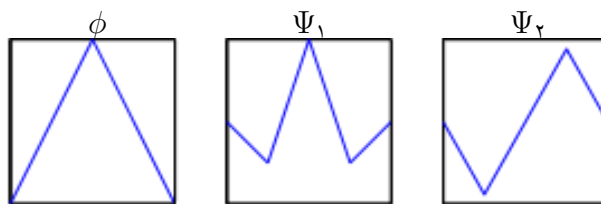
$$\sum_{l=0}^m \hat{h}_l(\xi) \overline{\hat{h}_l(\xi + \pi)} = e^{\frac{\pi}{\gamma}ij} (\sin\left(\frac{\xi}{\gamma}\right) \cos\left(\frac{\xi}{\gamma}\right))^m (1 - 1)^m = 0.$$

لذا  $-m$  موجک تعریف شده به صورت زیر

$$\hat{\psi}_l = -i^l e^{-ij\frac{\xi}{\gamma}} \sqrt{\binom{m}{l}} \frac{\cos^{m-l}\left(\frac{\xi}{\gamma}\right) \sin^{m+l}\left(\frac{\xi}{\gamma}\right)}{\left(\frac{\xi}{\gamma}\right)^m}$$

یک قاب چسبان برای  $L^2(\mathbb{R})$  تولید می کند. توجه داشته باشیم که هر موجک قاب  $\psi_l$  یک تابع مقدار حقیقی متقارن محدود شده به  $[-\frac{m+j}{\gamma}, \frac{m+j}{\gamma}]$  است که در مثال زیر برای  $m = 2$  بررسی می شود.

مثال ۳-۱-۱۴. فرض کنید  $h_0 = [\frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\gamma}]$  ماسک نظریف بی-اسپلاین  $B_2(x) = \max(1 - |x|, 0)$  باشد. تعریف می کنیم  $h_1 = [-\frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\gamma}, \frac{-1}{\gamma}]$  و  $h_2 = [\frac{\sqrt{2}}{\gamma}, 0, \frac{-\sqrt{2}}{\gamma}]$ . آن گاه (۲۵-۲) و (۲۶-۲) برای  $h_0, h_1, h_2$  برقرارند. بنابراین دستگاه  $X(\Psi)$  که  $\Psi = \{\psi_1, \psi_2\}$  یک قاب چسبان در  $L^2(\mathbb{R})$  است. شکل ۳-۲ را ببینید.



شکل ۳-۲: اسپلاین نظریف پذیر و موجک های متناظر آن

## ۲-۳ قاب های چسبان و بانک صافی UHF

در این بخش، مطالبی برای بهبود قاب ها بیان می شود که به ما اجازه می دهد برای ساخت صافی قاب پارسوال جدید، صافی های موجود بر پایه قاب (موجک قاب) را تعدیل کنیم [۸]، [۱۶].

هدف ما ساخت صافی های دیجیتال با استفاده از تبدیلات صحیح از بعضی صافیهای منتهای-طول می باشد. به طور دقیق تر، فضای هیلبرت سیگنال های دیجیتالی که ما قصد داریم در آن کار کنیم  $l^2(\mathbb{Z}^d)$  است، که  $d = 2$ ، گرچه نتایج ارائه شده در این بخش برای هر عدد طبیعی  $d$  برقرار است.

عملگر تبدیل  $T_n$  که روی  $l^2(\mathbb{Z}^d)$  عمل می کند را به صورت  $T_n s(m) = s(m-n)$  برای هر  $n, m \in \mathbb{Z}^d$  تعریف می کنیم. عنصر  $K$  از  $l^2(\mathbb{Z}^d)$  صافی دیجیتال است اگر تبدیل فوریه معکوس آن  $(\hat{K})$ ، یک تابع کراندار باشد. در این قسمت تبدیل فوریه  $L^1([-\pi, \pi])$  را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) e^{-in\omega} d\omega, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

صافی دیجیتال  $K$  روی سیگنال دیجیتال  $l^2(\mathbb{Z}^d)$  به وسیله کانولوشن  $(s \rightarrow s * K)$  عمل می کند، که یک عملگر کراندار را روی  $l^2(\mathbb{Z}^d)$  تعریف می کند. مزیت قاب های پارسوال در مقابل سایر قاب های دیگر این است که از یک مجموعه بردار یکسان هم برای تجزیه و هم برای بازسازی استفاده می کند و مانند حالت پایه های متعامد، توان سیگنال ثابت باقی می ماند.

مجموعه منتهای  $\{K_i: i = 0, 1, \dots, l\}$  از عناصر  $\mathcal{H}$  قابی برای  $\mathcal{H}$  تولید می کند، اگر خانواده  $\{T_n K_i: n \in \mathbb{Z}^d, i = 0, 1, \dots, l\}$  قابی برای  $\mathcal{H}$  باشد.

گزاره ۳-۲-۱. فرض کنید  $l, 0, 1, \dots, l$   $K_i$  مجموعه ای منتهای از صافی های دیجیتال باشد. آن گاه  $\{T_n K_i: n \in \mathbb{Z}^d, i = 0, 1, \dots, l\}$  قابی برای  $l^2(\mathbb{Z}^d)$  است اگر و فقط اگر  $A, B > 0$  موجود باشد به طوری که برای تقریباً هر  $\omega \in [-\pi, \pi]^d$  نامساوی زیر برقرار باشد:

$$A \leq \sum_{i=0}^l |\widehat{K}_i(\omega)|^2 \leq B.$$

همچنین این قاب پارسوال است اگر و فقط اگر  $A = B = 1$ .

□

برهان. اثبات در مرجع [۱۸] بیان شده است.

نتیجه زیر مستقیماً از گزاره بالا نتیجه می شود.

نتیجه ۲-۲-۳. فرض کنید  $l, \dots, 1, 0, i, K_i$ ، مجموعه ای متناهی از صافیهای دیجیتال باشد که یک قاب برای  $l^2(\mathbb{Z}^d)$  تولید می کند. برای عدد صحیح مثبت  $p$ ، فرض کنیم  $U$  تابع ماتریسی  $(l+1) \times (p+1)$   $2\pi\mathbb{Z}^d$  دوره ای باشد که درایه های  $(U(\omega))_{q,r}$  پیوسته هستند. اگر  $A_1 > 0$  موجود باشد به طوری که تقریباً برای هر  $\omega \in [-\pi, \pi]^d$  داشته باشیم

$$A_1 \|x\| \leq \|U(\omega)x\|, \quad \forall x \in C^{l+1}$$

آن گاه ماتریس ضربی  $(\widehat{K}_0(\omega), \widehat{K}_1(\omega), \dots, \widehat{K}_l(\omega))^t U(\omega)$  خانواده جدیدی از صافیهای دیجیتال را تعریف می کند که که یک قاب روی  $l^2(\mathbb{Z}^d)$  تولید می کند. به خصوص اگر  $U(\omega)$  تقریباً برای هر  $\omega \in [-\pi, \pi]^d$  ایزومتري باشد، آن گاه نتیجه و قاب اصلی دارای کران های یکسان هستند.

موضوع صافی بانک های سه کاناله بر پایه قاب های چسبان که از MRA ها به دست می آید، دارای دامنه وسیعی از مراجع می باشد [۱۹]-[۲۰]. از نتیجه ۲-۲-۳ برای بهبود قاب توصیف شده توسط رن و شن [۲۱] استفاده می کنیم که ساده ترین مثال از قاب اسپلاین چسبان با تکیه گاه فشرده می باشد. به منظور مینیمم نگه داشتن تعداد موجک ها، اسپلاین هایی از درجه یک انتخاب می کنیم. قاب های تولید شده به وسیله صافیهای  $h_0$  (زیر گذر)،  $h_1$  (میان گذر) و  $h_2$  (بالا گذر)

$$h_0 = \frac{1}{4}[1, 2, 1], \quad h_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}[1, 0, 1], \quad h_2 = \frac{1}{4}[-1, 2, -1]$$

پارسوال هستند. متناظراً تبدیل فوریه معکوس آن ها به ترتیب

$$m_0(\omega) = \cos^2 \frac{\omega}{4}, \quad m_1(\omega) = i \frac{\sqrt{2}}{4} \sin \omega, \quad m_2(\omega) = \sin^2 \frac{\omega}{4}$$

می باشند. می توان گفت

$$|m_0(\omega)|^2 + |m_1(\omega)|^2 + |m_2(\omega)|^2 = 1, \text{ for } \omega \in [-\pi, \pi] \quad (۴-۳)$$

و بنا به گزاره ۲-۲-۳،  $h_0, h_1, h_2$  تشکیل یک قاب چسبان برای  $l^2(\mathbb{Z})$  می دهد.

<sup>1</sup>Ron and Shen

تابع مقیاس ریس  $\phi$  و موجک های  $\psi_1$  و  $\psi_2$  مربوط به  $m_0, m_1, m_2$ ، به ترتیب به صورت

$$\widehat{\phi}(\omega) = \frac{\sin^2(\frac{\omega}{4})}{(\frac{\omega}{4})^2}, \quad \widehat{\psi}_1(\omega) = i\sqrt{2} \frac{\cos(\frac{\omega}{4})\sin^3(\frac{\omega}{4})}{(\frac{\omega}{4})^2}$$

و

$$\widehat{\psi}_2(\omega) = -\frac{\sin^4(\frac{\omega}{4})}{(\frac{\omega}{4})^2}$$

می باشند.

حاصلضرب تنسوری قاب پارسوال ۱- بعدی رن و شن در خودش، قاب چسبان دیگری است که متشکل از

نه صافی جدایی پذیر

$$m_{p,q}(\omega_1, \omega_2) = m_p(\omega_1)m_q(\omega_2)$$

می باشد که  $p, q \in \{0, 1, 2\}$ . تساوی زیر برقرار است:

$$\sum_{p,q=0}^2 |m_{p,q}(\omega)|^2 = 1, \quad for \quad \omega \in [-\pi, \pi]^2. \quad (5-3)$$

بنابر این،  $m_{0,0}$  را به عنوان یک صافی پایین گذر و هشت صافی دیگر را به عنوان صافی های میان گذر و بالا گذر در نظر می گیریم. مجموعه همه این نه صافی را بانک صافی  $UHF^9$  می نامیم و صافی های متناظر با آن ها به صورت نه ماتریس  $3 \times 3$ ،  $M_{p,q} := h_p^t h_q$  می باشد. توجه کنید که در بانک صافی  $UHF^9$ ، صافی های  $M_{0,1}$  و  $M_{1,0}$  عملگرهای سوبل<sup>۱</sup> هستند که لبه های افقی و عمودی را شناسایی می کنند.

بانک صافی  $UHF^{11}$ : تساوی (5-3) ایجاب می کند که برای هر  $\omega \in [-\pi, \pi]^2$  بردار  $\nu_1 = \nu_1(\omega)$

تعریف شده به صورت

$$\nu_1 := (m_{0,0}, m_{0,1}, m_{1,0}, m_{1,1}, m_{0,2}, m_{2,0}, m_{2,1}, m_{1,2}, m_{2,2})^t$$

یک بردار واحد در  $C^9$  است. برای ساخت صافی های جدید ابتدا زوج صافیهای  $(m_{0,1}, m_{1,0})$  را به صورت چهارتایی  $(m_{0,1}, m_{1,0}, m_{0,1}, m_{1,0})$  قرار می دهیم. برای دستیابی به این ایزومتري، نگاشت  $D_1$  را تعريف می

<sup>۱</sup>Sobel

کنیم

$$D_1 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I_{2 \times 2} \\ I_{2 \times 2} \end{bmatrix}.$$

از آنجا که ستون های  $D_1$  زیر مجموعه متعامدی از  $C^4$  تشکیل می دهد، در می یابیم که  $D_1$  نگاشتی ایزومتری از  $C^2$  به  $C^4$  تعریف می کند. سپس از ماتریس دوران  $R_1$ ، که

$$R_1 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

برای در هم پیچیدن دو ماتریس بدون تغییر ماتریس های اصلی، استفاده می کنیم. به طور خلاصه ماتریس ایزومتری  $E_1$  از  $C^2$  به  $C^4$  را به کار می بریم، که

$$E_1 := \begin{bmatrix} I_{2 \times 2} & \circ \\ \circ & R_1 \end{bmatrix} D_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \circ \\ \circ & \sqrt{2} \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

حال با در نظر گرفتن تجزیه های  $C^4 = C \oplus C^2 \oplus C^2$  و  $C^6 = C \oplus C^2 \oplus C^2$  تابع ماتریسی

$$U_1(\omega) := \begin{bmatrix} 1 & \circ & \circ \\ \circ & E_1 & \circ \\ \circ & \circ & I_{6 \times 6} \end{bmatrix}$$

را تعریف می کنیم که یکانی نیز است، چون  $E$  و لذا  $U_1(\omega)$ ، برای هر  $\omega$  ایزومتری هستند، بنابر این نتیجه ۳-۲- برای  $2$  برای  $U_1(\omega)\nu(\omega) := \nu_1(\omega)$  به کار می رود و  $\nu_1(\omega)$  به یک بانک صافی ۱۱-باند افزایش می یابد، که شامل انتقال های صحیح از صافی هایی است که به وسیله توابع مختصات  $\nu_1$  تعریف می شود و  $\nu_1$  تشکیل یک قاب پارسوال در  $l^2(\mathbb{Z}^2)$  می دهد.

بانک صافی  $UHF_{11}$  توسط صافی های زیر پیاده سازی می شود؛  $K_{\circ} = M_{\circ, \circ}$  که صافی پایین گذر است و صافی های  $K_1 = (\frac{\sqrt{x}}{2})M_{1, \circ}$ ،  $K_2 = (\frac{\sqrt{x}}{2})M_{1, \circ}$ ،  $K_3 = (\frac{1}{2})(M_{\circ, 1} + M_{1, \circ})$ ،  $K_4 = (\frac{1}{2})(M_{\circ, 1} - M_{1, \circ})$ ،  $K_5 = M_{1, 1}$ ،  $K_6 = M_{\circ, 2}$ ،  $K_7 = M_{2, \circ}$ ،  $K_8 = M_{1, 2}$ ،  $K_9 = M_{2, 1}$ ،  $K_{10} = M_{2, 2}$  بالا گذر می باشند. توجه داشته باشید که مختصات های دوم و سوم  $\nu_1$  همچنان معرف عملگر های سو بل به ترتیب در خطوط افقی

و عمودی هستند. علاوه بر این پاسخ ضربه ای مختصات های چهارم و پنجم  $\nu_1$  به صورت

$$\frac{\sqrt{2}}{8} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\sqrt{2}}{8} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

می باشند. این دو صافی مانند مشتقات موازی در جهت  $-\frac{\pi}{4}$  و  $\frac{\pi}{4}$ ، عمل می کنند و یا معادلاً مانند عمگرهای سوبل عمل می کنند.

**بانک صافی UHF14:** به منظور نمایش بیشتر کارایی نتیجه ۳-۲-۲، UHF11 را با صافی هایی که قادر به تشخیص یکتایی های مرتبه دوم در جهت های بیشتر هستند، تقویت می کنیم. ابتدا توجه کنید که  $M_{0,2}$ ،  $M_{2,0}$  و  $M_{2,2}$  صافی های لاپلاسی افقی، عمودی و همسانگرد<sup>۱</sup> هستند. دوباره مانند گام اول با استفاده از

$$D_2 := \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \sqrt{7} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

برای این سه صافی و سپس دوران

$$R_2 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

را برای نسخه های تازه تعریف شده به کار می بریم. نتیجه پایانی ایزومتر

$$U_2(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I_{5 \times 5} & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_{3 \times 3} \end{bmatrix}.$$

<sup>۱</sup>Isotropic

می باشد که

$$E_{\nu} := \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & \circ \\ \circ & R_{\nu} \end{bmatrix} D_{\nu}.$$

با استفاده از نتیجه ۲-۲-۳  $\nu_{\nu}(\omega) := U_{\nu}(\omega)\nu_1(\omega)$  به قاب پارسوالی در  $l^2(\mathbb{Z}^2)$  ارتقا می یابد. ویژگی خاص این بانک صافی ۱۴-باند این است که ترکیبات خطی

$$M_{\nu, \circ} + M_{\circ, \nu} + M_{1,1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \circ & \circ & -1 \\ \circ & 2 & \circ \\ -1 & \circ & \circ \end{bmatrix}$$

و

$$M_{\nu, \circ} + M_{\circ, \nu} - M_{1,1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & \circ & \circ \\ \circ & 2 & \circ \\ \circ & \circ & -1 \end{bmatrix}$$

که توسط مختصات های نهم و دهم  $\nu_{\nu}$  تعریف شده اند، عمگرهای لاپلاس هستند. این بانک صافی ۱۴-باند را  $UHF_{14}$  می نامیم. پاسخ ضربه ای این صافی بانک ۱۴-باند به صورت زیر است:  $K_{\circ} = M_{\circ, \circ}$   
 $K_4 = (\frac{1}{4})(M_{\circ,1} - M_{1,\circ})$ ,  $K_3 = (\frac{1}{4})(M_{\circ,1} + M_{1,\circ})$ ,  $K_2 = (\frac{\sqrt{2}}{4})M_{1,\circ}$ ,  $K_1 = (\frac{\sqrt{2}}{4})M_{\circ,1}$   
 $K_8 = (\frac{1}{4})(M_{\circ,2} + M_{2,\circ} + M_{1,1})$ ,  $K_7 = (\frac{\sqrt{5}}{4})M_{2,\circ}$ ,  $K_6 = (\frac{\sqrt{5}}{4})M_{\circ,2}$ ,  $K_5 = (\frac{\sqrt{5}}{4})M_{1,1}$   
و  $K_{12} = M_{1,2}$ ,  $K_{11} = M_{2,1}$ ,  $K_{10} = (\frac{\sqrt{2}}{4})(M_{\circ,2} - M_{2,\circ})$ ,  $K_9 = (\frac{1}{4})(M_{\circ,2} + M_{2,\circ} - M_{1,1})$   
 $K_{13} = M_{2,2}$ .

### ۳-۳ روش کار و الگوریتم های حذف نویز

در این بخش ابتدا الگوریتم حذف نویز با روش موجک قاب که در قسمت های قبل معرفی شد، توسط نرم افزار متلب<sup>۱</sup> بر روی تصاویر استاندارد سیاه-سفید بیان می شود و سپس بر روی تصاویر رنگی پیاده سازی شده و نتایج آن با نتایج دو روش کلاسیک، موجک و میانگین، ثبت شده در نرم افزار متلب مقایسه می شود.

<sup>۱</sup>Matlab



### ۱-۳-۳ الگوریتم کار به روش موجک قاب ها

فرض کنیم  $X$  تصویری نویز دار باشد.  $X$  را به وسیله بانک صافی  $UHF$  ۱۱ که در قسمت های قبل ساختیم، صافی می کنیم. تاکید می کنیم که خروجی هر کانال در این بانک صافی تصویر اولیه را مخدوش نمی کند. فرض کنیم  $Y_m$  خروجی تصویر  $X$  از بین باند  $m$  ام باشد (یعنی  $Y_m = X * K_m$ ). خروجی های  $Y_m$  را به دو گروه تقسیم می کنیم  $m = 1, 000, 5$  و  $m = 6, 000, 10$ . توجه کنید که صافی های گروه اول رامی توان برای شناسایی یکتایی های مرتبه اول استفاده کرد، حال آن که صافی های گروه دوم برای شناسایی یکتایی های مرتبه دوم مورد استفاده قرار می گیرند. بنابراین آستانه های متفاوتی را برای این دو گروه استفاده می کنیم.

برای گروه اول، ضرایب را در  $Y_m$ ،  $m = 1, 000, 5$  با استفاده از عملگر آستانه سخت  $\eta_T^H$ ، تغییر می دهیم که  $T = \alpha \cdot \sigma_n \sqrt{2 \log N}$ ، به طوری که  $\alpha$  ضریب آستانه و  $N$  تعداد پیکسل های  $X$  است و  $\sigma_n$  واریانس نویز می باشد.

هرگاه تبدیل موجک یکانی مورد استفاده قرار گیرد آستانه  $\sigma_n \sqrt{2 \log N}$  برای مقادیر بزرگ  $N$  انتخاب خوبی می باشد

[۲۲]. اگر چه تبدیلات القا شده به وسیله پیچش با  $K_m$ ، یکانی نیستند و فقط ایزومتر می باشند. بنابر این آستانه نیاز به کوچک سازی با استفاده از ضریب  $\alpha$  دارد که  $0 < \alpha < 1$  به صورت تجربی به دست می آید و معیار انتخاب آن ماکزیمم سازی نسبت اوج سیگنال به نویز<sup>۱</sup> می باشد. همچنین اگر  $\sigma_n$  معلوم نباشد به وسیله برآورد گر میانگین

$$\hat{\sigma} = \frac{\text{Median}(|Y_{Haar}[i, j]|)}{0.6745}$$

تخمین زده می شود.

$\tilde{Y}_m$  را برای  $m = 1, 2$  به صورت زیر به دست می آوریم:

$$\tilde{Y}_m = \begin{cases} Y_m, & |Y_m| > T_1 \text{ or } (|Y_3| \text{ or } |Y_4|) > T_2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6-3)$$

که  $T_2 = \frac{1}{8}(2 + \sqrt{2})T$ ،  $T_1 = (\frac{1}{4})T$  همچنین برای  $m = 3, 4$  داریم:

$$\tilde{Y}_m = \begin{cases} Y_m, & |Y_m| > T_2 \text{ or } (|Y_1| \text{ or } |Y_2|) > T_1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7-3)$$

<sup>۱</sup>PSNR

و برای  $Y_5$ ، مستقیماً از عملگر آستانه سخت استفاده می کنیم.

$$\tilde{Y}_5 = \eta_T^H(Y_5). \quad (۸-۳)$$

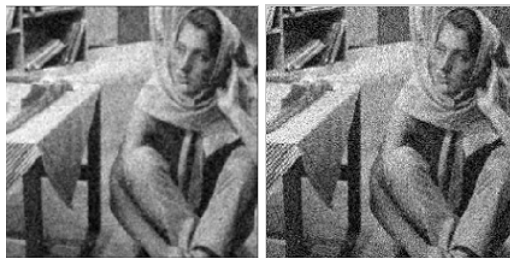
خروجی های گروه دوم به وسیله روشی که میچاک<sup>۱</sup> در [۲۳] معرفی کرده است حذف نویز می شود، بدین ترتیب که فرض کنید ضرایب  $Y_m[i, j]$  متغیر های گوسی مستقل با واریانس  $\sigma^2[i, j]$  باشند. تخمین  $\sigma^2[i, j]$  بر اساس همسایگی های موضعی  $\mathcal{N}_{i,j}$  پنجره های مربعی با سایز  $M$  و مرکز  $Y_m[i, j]$  هستند، انجام می گیرد. همچنین  $\tilde{\sigma}^2[i, j]$  به صورت زیر تعریف می شود [۲۳]

$$\tilde{\sigma}^2[i, j] = \frac{M}{4\lambda} \left[ -1 + \sqrt{1 + \left(\frac{8\lambda}{M^2}\right) \sum Y_m^2[p, q]} \right] - \sigma_n^2$$

که  $\lambda = 1$  و مجموع سری برای تمام  $[p, q]$  های درون  $\mathcal{N}_{i,j}$  می باشد. از طرفی چون ممکن است برای  $M$  های خیلی کوچک، مقادیر منفی برای تخمین مورد نظر به دست بیاید لذا برای رفع این مشکل مقادیر منفی را برابر صفر قرار می دهیم، یعنی  $\tilde{\sigma}^2[i, j] = \max(0, \tilde{\sigma}^2[i, j])$ . با  $\sigma^2[i, j]$  و  $\sigma_n^2$  تخمین زده شده، صافی وینر<sup>۲</sup> را برای همه  $Y_m[i, j] \in Y_m$  به کار می بریم لذا برای  $10, \dots, 6$  داریم

$$\tilde{Y}_m[i, j] = \left[ \frac{(\sigma^2[i, j])}{(\sigma^2[i, j] + \sigma_n^2)} \right] Y_m[i, j]. \quad (۹-۳)$$

الگوریتم این روش در ضمیمه آ-۱ و کد های متلب ساخت  $\tilde{Y}_m$  ها در ب-۱ بیان شده است. مثالی از این الگوریتم را در شکل ۳-۳ مشاهده می کنیم.



(ا) تصویر نویز دار (ب) تصویر بهبود یافته

شکل ۳-۳: حذف نویز با استفاده از قاب چسبان

در برخی از وسایل پخش صوتی و تصویری حتما عددی را مشاهده کرده اید که جلوی  $SNR$  یا  $S/N$  نوشته






















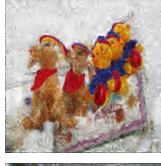






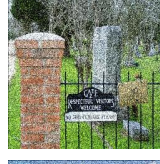
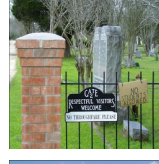
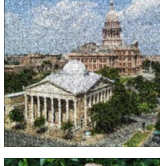
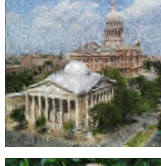

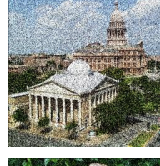
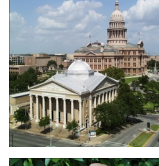
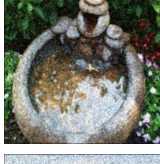
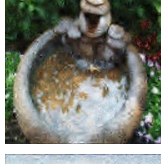

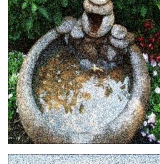
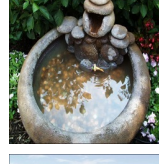


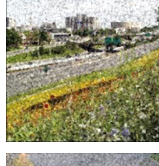

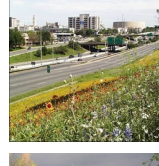


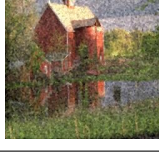


<sup>۱</sup>Mihcak    <sup>۲</sup>Wiener

شده است. شاید برای شما هم جای سوال باشد که این عدد چه چیزی را مشخص می‌کند؟! این عدد همانطور که از معنی عبارت کامل آن یعنی Signal to Noise Ratio مشخص است، میزان نسبت سیگنال به نویز را نشان می‌دهد و به عبارتی دیگر بیانگر میزان توان سیگنال اصلی به توان نویز است. هرچه این نسبت بیشتر باشد، کیفیت صدا و تصویر بهتر خواهد بود. در مورد تصویر، نویز بر روی تصویر ایجاد شده به صورت دانه‌های برفک مشخص خواهد شد و موجب پایین آمدن قابلیت تشخیص در تصویر نمایش داده شده بر روی نمایشگر خواهد شد.

مسلماً هیچ الگوریتمی نمی‌تواند تصویر نویز دار را به حالت اولیه ( بدون نویز ) برگرداند و این یعنی در هر روش مقداری خطا وجود دارد. منظور از این خطا، میزان اختلاف بین پیکسل های تصویر بازسازی شده و تصویر اولیه است. یعنی اگر  $x_i$  مقدار عددی پیکسل در تصویر اولیه باشد و  $\hat{x}_i$  مقدار همان پیکسل در تصویر نویز گیری شده باشد، آن گاه خطا به صورت زیر محاسبه می‌گردد














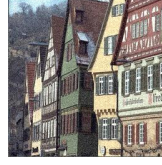
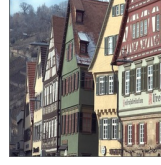













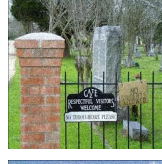
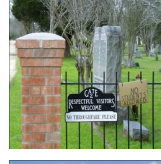




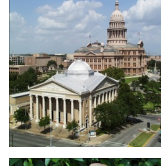
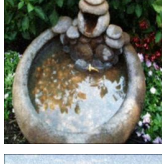
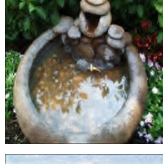
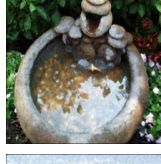
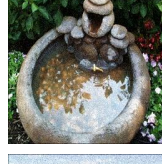
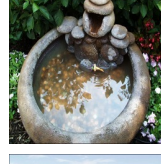

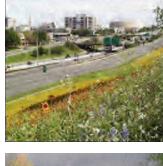


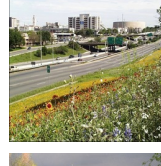

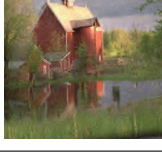
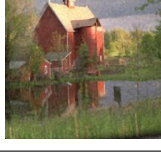
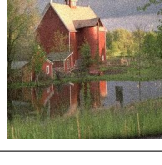
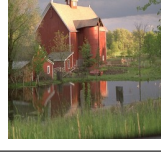
$$error = \frac{\sum_{i=1}^n |\hat{x}_i - x_i|}{n}$$

حال که با مفهوم خطا آشنا شدیم برای نشان دادن کارایی روش قاب چسبان نسبت به برخی روش های دیگر میزان خطای این روش ها را در  $SNR$  های مختلف مقایسه می‌کنیم. در جداول ۱-۳ و ۲-۳ مجموعه ای از تصاویر دلخواه که  $SNR$  آن ها به ترتیب ۱۰ و ۲۰ می باشد، با سه روش نویز گیری شده و نتایج نشان داده شده است. همچنین مقادیر میانگین خطا برای هر تصویر در جداول ۳-۳ و ۴-۳ آمده است. در نهایت مقایسه میانگین کل خطا به صورت نموداری در شکل های ۳-۴ و ۳-۵ درج شده است.

Tight frame	Wavelet	Median	SNR=۱۰	Image	Image Name	Row
					bikes	۱
					building ۲	۲
					buildings	۳
					caps	۴
					carnival dolls	۵
					cemetery	۶
					church and capitol	۷
					coins in fountain	۸
					flowers in highway	۹
					house	۱۰

جدول ۳-۱: نمایش نتایج در  $SNR = 10$



Tight frame	Wavelet	Median	SNR=۲۰	Image	Image Name	Row
					bikes	۱
					building۲	۲
					buildings	۳
					caps	۴
					carnivaldolls	۵
					cemetry	۶
					churchandcapitol	۷
					coinsinfountain	۸
					flowersonih۳۵	۹
					house	۱۰

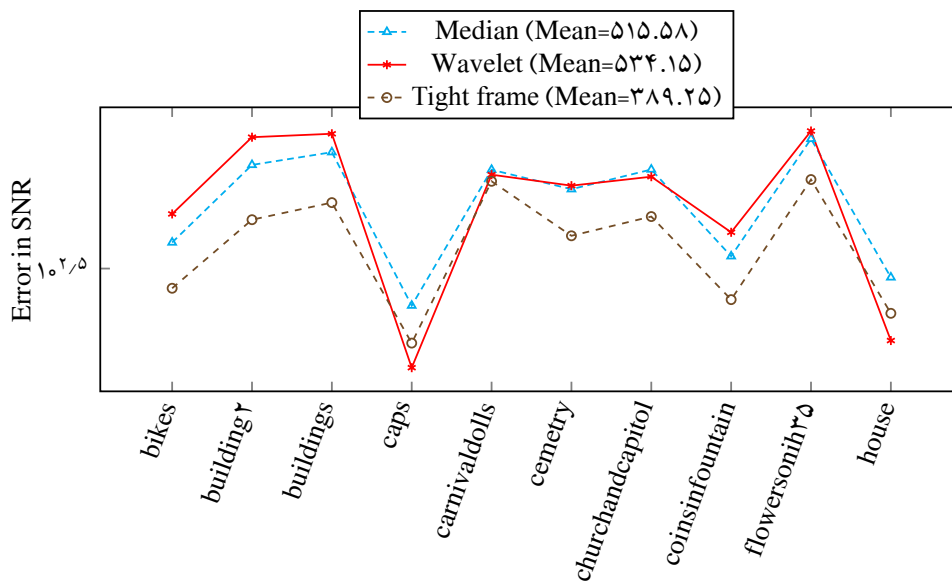
جدول ۳-۲: نمایش نتایج در  $SNR = 20$

Tight frame	Wavelet	Median	Image Name	Row
۲۷۶.۴۸	۴۵۸.۹۳	۳۷۷.۸۲	bikes	۱
۴۴۱.۲۶	۷۷۴.۵۳	۶۴۱.۱۳	building۲	۲
۴۹۵.۷۶	۷۹۲.۸۹	۶۹۹.۰۸	buildings	۳
۱۹۰.۲۷	۱۶۰.۸۹	۲۴۵.۶۶	caps	۴
۵۷۳.۳۵	۵۹۹.۷۵	۶۲۰.۳۴	carnivaldolls	۵
۳۹۵.۴۱	۵۵۶.۵۵	۵۴۳.۲۱	cemetery	۶
۴۵۰.۸۰	۵۹۱.۶۱	۶۲۱.۳۱	churchandcapitol	۷
۲۵۵.۸۷	۴۰۴.۹۵	۳۴۳.۹۰	coinsinfountain	۸
۵۸۰.۲۵	۸۰۷.۸۲	۷۶۵.۵۶	flowersonih۳۵	۹
۲۳۳.۰۶	۱۹۳.۵۸	۲۹۷.۷۹	house	۱۰

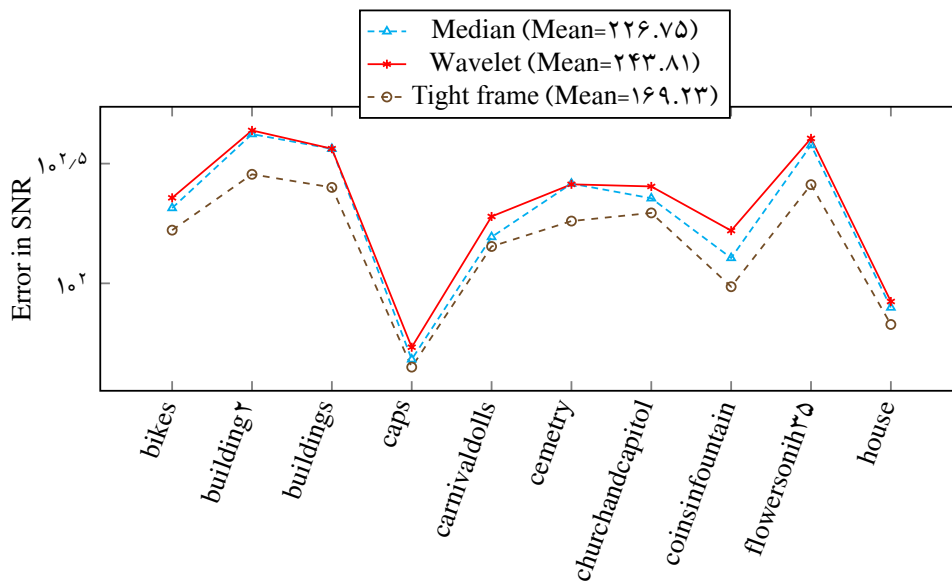
جدول ۳-۳: مقدار خطا در  $SNR = ۱۰$

Tight frame	Wavelet	Median	Image Name	Row
۱۶۶.۷۹	۲۲۷.۵۹	۲۰۶.۲۸	bikes	۱
۲۸۵.۳۵	۴۳۵.۰۸	۴۲۰.۰۵	building۲	۲
۲۵۱.۵۵	۳۶۵.۰۳	۳۶۴.۶۱	buildings	۳
۴۴.۶۹	۵۴.۱۰	۴۸.۱۴	caps	۴
۱۴۲.۵۶	۱۹۰.۲۴	۱۵۶.۱۲	carnivaldolls	۵
۱۸۲.۰۲	۲۵۹.۱۲	۲۶۰.۹۳	cemetery	۶
۱۹۶.۸۵	۲۵۳.۸۹	۲۲۶.۵۷	churchandcapitol	۷
۹۶.۸۱	۱۶۶.۰۲	۱۲۷.۶۴	coinsinfountain	۸
۲۵۸.۳۴	۴۰۳.۰۳	۳۷۷.۸۵	flowersonih۳۵	۹
۶۷.۳۵	۸۴.۰۰	۷۹.۲۸	house	۱۰

جدول ۳-۴: مقدار خطا در  $SNR = ۲۰$



شکل ۳-۴: نمودار خطا در  $SNR = ۱۰$



شکل ۳-۵: نمودار خطا در  $SNR = ۲۰$

## فهرست منابع

- [1] Christensen, Ole. *Frames and Bases, An Introductory Course*. Birkhauser, Inc., Boston, NY, USA, 1st ed. , 2008.
- [2] Christensen, Ole. *An Introduction to Frames and Riesz Bases*. Birkhauser, Inc., Boston, NY, USA, 1st ed. , 2003.
- [3] Duffin, Richard and Schaeffer, Albert. A class of nonharmonic fourier series. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 72(2):341-366, 1952.
- [4] Daubechies, Ingrid and Han, Bin and Ron, Amos and Shen, Zuowei. MRA-based constructions of wavelet frames. *Appl. Compu. Harmon. Anal.*, 14 (2):1-46, 1988.
- [5] Christopher, Edward and Walnut, David. Continuous and discrete wavelet transforms. *SIAM Rev.*, 31(4):628-666, 1989.
- [6] Frazier, Michael and Garrigós, Gustavo and Wang, Kunchuan and Weiss, Guido. A characterization of functions that generate wavelet and related expansion. *J. Fourier. Anal. Appl.*, 3(sp):883-906, 1997.
- [7] Han, Deguang and Larson, David. *Frames, Bases and Group Representations*. Department of Mathematics, A&M University, TX, USA, 2nd ed. , 2000.
- [8] Ron, Amos and Shen, Zuowei. Affine systems in  $L^{\infty}(\mathbb{R}^d)$  II: Dual systems. *J. Fourier. Anal. Appl.*, 3(5):617-637, 1997.
- [9] Young, Robert. *An Introduction to Non-Harmonic Fourier Series*. Academic Press, Pure And Applied Mathematics, NY, USA, 2nd ed. , 2001.
- [10] Folland, Gerald B. *Real Analysis Modern Techniques and Their Applications*. A Wiley-Interscience Publication, Inc., John Wiley& Sons, NY, USA, 2nd ed. , 1999.
- [11] Folland, Gerald B. *A Course in Abstract Harmonic Analysis*. CRC press, Inc., NW, Boca Raton, 1st ed. , 1995.



- [12] Rudin, Walter. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, Inc., NY, USA, 3rd ed. , 1986.
- [13] Benedetto, John J. and Li, Shidong. *The theory of multiresolution analysis frames and applications to filter banks*. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 5(4):389-427, 1998.
- [14] Hernandez, Eugenio and Weiss, Guido. *A first course on wavelets*. CRC press, Inc., FL, USA, 1st ed.,1996.
- [15] Hong, Don and Wang, Jianzhong and Gardner, Robert *Real Analysis: with an Introduction to Wavelets and Applications*. Academic press, Inc., TX, USA, 1st ed.,2005.
- [16] Papadakis, Manos and Grigory, Gogoshin and Kakadiaris, Ioannis A. and Kouri, Donald and Hoffman, David K. *Non-separable radial frame multiresolution analysis in multidimensions*. *Numer. Func. Anal.*, 24(7):907-928, 2003.
- [17] Papadakis, Manos. *Generalized frame multiresolution analysis of abstract Hilbert spaces*. Birkhauser, Inc., Boston, NY, USA, 1st ed. , 2003.
- [18] Shen, Lixin and Papadakis, Manos and Kakadiaris, Ioannis A. and Kouri, Donald and Hoffman, David K. *Image denoising using a tight frame*. *IEEE Trans. Image Process.*, 9(9):1522-1531, 2000.
- [19] Selesnick, Ivan W. *Smooth wavelet tight frames with zero moments*. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 10(1):163-181, 2001.
- [20] Han, Bin and Mo, Qun. *Tight wavelet frames generated by three symmetric b-spline functions with high vanishing mooments*. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 132(1):77-86, 2004.
- [21] Ron, Amos and Shen, Zuowei. *Affine systems in  $L_{\gamma}(\mathbb{R}^d)$ : The analysis of the analysis operator*. *J. Func. Anal. Appl.*, 148(2):408-447, 1997.
- [22] Donoho, David L. and Johnstone, Jain M. *Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage*. *Biometrika*, 81(3): 425-455, 1994.
- [23] Mihcak, Kivanc and Kozintsev, Igor V. and Ramchandran, Kannan. *Low-complexity image denoising based on statistical modeling of wavelet coefficients*. *IEEE signal process. Lett.*, 6(2): 300-303, 1999.

# پیوست آ

## الگوریتم ها

### آ-۱ الگوریتم حذف نویز به کمک قاب چسبان

---

الگوریتم آ-۱ الگوریتم موجک قاب چسبان برای حذف نویز .

ورودی: تصویر نویز دار  $X$ ، ضریب آستانه  $\alpha$  و مراحل تجزیه  $I$ .

خروجی: تصویر اصلاح شده  $\tilde{X}$ .

۱: تصویر  $X$  را تا مرحله  $I$  به کمک بانک فیلتر  $UHF_{11}$ ، تجزیه کرده و  $Y_m$  ها را برای  $m = 0, 10, 100, \dots$

به دست می آوریم.

۲: برای  $m = 0, 10, 100, \dots$ ،  $\tilde{Y}_m$  ها را با استفاده از معادلات (۳-۶)-(۳-۹) محاسبه می کنیم.

۳:  $\tilde{X}$  را با استفاده از  $Y_0$  و  $\tilde{Y}_m$ ، ها و به کمک بانک صافی  $UHF_{11}$  به دست می آوریم.

---

## پیوست ب

### کدها

#### ب-۱ ساخت $\tilde{Y}_m$ ها به کمک آستانه ها

برنامه ب-۱:  $\tilde{Y}_m$

```
T = alpha * sigma_n * sqrt(2*log10(N));           ۱
T1=(1/2)*T; T2=(1/8)*(2+sqrt(2))*T;              ۲
for i=2:3                                         ۳
    mask = abs(y{i})>T1 | abs(y{4})>T2 | abs(y{5})>T2; ۴
    yTilde{i} = double(mask);                     ۵
    yTilde{i}(mask) = y{i}(mask);                 ۶
end                                               ۷
for i=4:5                                         ۸
    mask = abs(y{i})>T2 | abs(y{2})>T1 | abs(y{3})>T1; ۹
    yTilde{i} = double(mask);                     ۱۰
    yTilde{i}(mask) = y{i}(mask);                 ۱۱
end                                               ۱۲
i=6; % y_5                                       ۱۳
mask = y{i}>T;                                     ۱۴
yTilde{i} = double(mask);                         ۱۵
yTilde{i}(mask) = y{i}(mask);                     ۱۶
for i=6:11                                        ۱۷
    %      ym2 = y{i}.^2;                          ۱۸
    tmpIm = zeros(H+M-1,W+M-1);%floor(M/2),W+floor(M/2)); ۱۹
    tmpIm(floor(M/2)+1:floor(M/2)+H,floor(M/2)+1:floor(M/2)+W) = y{i ۲۰
        }.^2;
    wym2 = im2col(tmpIm,[M M],'sliding');          ۲۱
%      wym3 = blockproc(tmpIm,[M M],fun,'PadPartialBlocks',true); ۲۲
    swym2 = sum(wym2);                             ۲۳
    sigmaTilde = M/(4*lambda) * (-1 + (1+(8*lambda/(M^2)*swym2)).^5) ۲۴
        sigma_n^2;
    sigma2ij = reshape(sigmaTilde,H,W);            ۲۵
    yTilde{i} = (sigma2ij ./ (sigma2ij+sigma_n^2)) .* y{i}; ۲۶
end                                               ۲۷
```

## واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

multi resolution analysis	آنالیز چند ریزگی
Parseval's identity	اتحاد پارسوال
bounded	کران دار
reconstruction	بازسازی
range	برد
response	پاسخ
basis	پایه
orthonormal basis	پایه متعامد یکه
Riesz basis	پایه ی ریس
schauder basis	پایه ی شودر
surjective	پوشا
convolution	پیچش
color scanner	پیمایش گر رنگی
characteristic function	تابع مشخصه
Fourier transform	تبدیل فوریه
frame decomposition	تجزیه ی قاب
refinable	تظریف پذیر
shift invariant	تغییر پایا
piecewise	تکه تکه
support	تکیه گاه
compact support	تکیه گاه فشرده
extension	توسیع
isometric	حافظ طول
sensor	حس گر
self-adjoint	خود الحاقی
well- defined	خوشتعریف
frequency domain	دامنه فرکانس
bijjective	دوسویی
Bessel sequence	دنباله بسل
frame sequence	دنباله قاب
dual	دوگان
alternate dual	دوگان غیر کانونی
canonical dual	دوگان کانونی
true color	رنگی
Fourier series	سری های فوریه
gray scale	سطح خاکستری
pseudo inverse	شبه وارون

frame conditions . . . . .	شرایط قاب
Fourier coefficients . . . . .	ضرایب فوریه
inner product . . . . .	ضرب داخلی
impulse . . . . .	ضربه
adjoint operator . . . . .	عملگر الحاقی
frame operator . . . . .	عملگر قاب
pre-frame operator . . . . .	عملگر پیش قاب
analysis operator . . . . .	عملگر تجزیه
bounded operator . . . . .	عملگر کران دار
dilation operator . . . . .	عملگر اتساع
translation operator . . . . .	انتقال عملگر
modulation operator . . . . .	مدولاسیون عملگر
Wiener space . . . . .	فضای واینر
frame . . . . .	قاب
overcomplete frame . . . . .	قاب اضافی
tight frame . . . . .	قاب چسبان
normal tight frame . . . . .	قاب چسبان نرمال
canonical dual frame . . . . .	قاب دوگان کانونی
exact frame . . . . .	قاب دقیق
approximately dual frames . . . . .	قاب های دوگان تقریبی
wavelet frame . . . . .	قاب موجک
complete . . . . .	کامل
optimal bounds . . . . .	کران های بهینه
orthogonal . . . . .	متعامد
positive . . . . .	مثبت
symmetric . . . . .	متقارن
independent . . . . .	مستقل
frame generator . . . . .	مولد قاب
Cauchy-Schwartz inequality . . . . .	نامساوی کشی - شوارتزر
exponential . . . . .	نمایی
inverse mapping . . . . .	نگاشت معکوس
invertible . . . . .	وارون پذیر
isotropic . . . . .	همسانگرد
biorthogonal . . . . .	هم متعامد
isomorphism . . . . .	یکریختی
unitary . . . . .	یکانی

## واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

adjoint operator	عملگر الحاقی
alternate dual	دوگان غیر کانونی
analysis operator	عملگر تجزیه
approximately dual frames	قاب های دوگان تقریبی
basis	پایه
Bessel sequence	دنباله بسل
bijjective	دوسویی
biorthogonal	هم متعامد
bounded	کران دار
bounded operator	عملگر کران دار
canonical dual	دوگان کانونی
canonical dual frame	قاب دوگان کانونی
Cauchy-Schwartz inequality	نامساوی کشی - شوارتزر
characteristic function	تابع مشخصه
color scanner	پیمایش گر رنگی
compact support	تکیه گاه فشرده
complete	کامل
convolution	پیچش
dilation operator	عملگر اتساع
dual	دوگان
exact frame	قاب دقیق
exponential	نمایی
extension	توسیع
fourier coefficients	ضرایب فوریه
Fourier series	سری های فوریه
fourier transform	تبدیل فوریه
frame	قاب
frame conditions	شرایط قاب
frame decomposition	تجزیه ی قاب
frame generator	مولد قاب
frame operator	عملگر قاب
frame sequence	دنباله قاب
frequency domain	دامنه فرکانس
gray scale	سطح خاکستری
impulse	ضربه
independent	مستقل

inner product . . . . .	ضرب داخلی
inverse mapping . . . . .	نگاشت معکوس
invertible . . . . .	وارون پذیر
isometric . . . . .	حافظ طول
isomorphism . . . . .	یکریختی
isotropic . . . . .	همسانگرد
modulation operator . . . . .	مدولاسیون عملگر
normal tight frame . . . . .	قاب چسبان نرمال
multi resolution analysis . . . . .	آنالیز چند ریزگی
optimal bounds . . . . .	کران های بهینه
orthogonal . . . . .	متعامد
orthonormal basis . . . . .	پایه متعامد یکه
overcomplete frame . . . . .	قاب اضافی
Parseval's identity . . . . .	اتحاد پارسوال
pre-frame operator . . . . .	عملگر پیش قاب
pseudo inverse . . . . .	شبه وارون
piecewise . . . . .	تکه تکه
positive . . . . .	مثبت
range . . . . .	برد
response . . . . .	پاسخ
reconstruction . . . . .	بازسازی
refinable . . . . .	تظریف پذیر
riesz basis . . . . .	پایه ی ریس
schauder basis . . . . .	پایه ی شودر
self-adjoint . . . . .	خود الحاقی
sensor . . . . .	حس گر
shift invariant . . . . .	تغییر پایا
support . . . . .	تکیه گاه
surjective . . . . .	پوشا
symmetric . . . . .	متقارن
tight frame . . . . .	قاب چسبان
translation operator . . . . .	انتقال عملگر
true color . . . . .	رنگی
unitary . . . . .	یکانی
wavelet frame . . . . .	قاب موجك
well- defined . . . . .	خوشتعریف
wiener space . . . . .	فضای واینر

Hakim Sabzevari University  
An Outline of MSc. Thesis



Surname: Zahedi	Name: Abdolrashid	Student No.: 9213122090
-----------------	-------------------	-------------------------

Supervisor: Dr. Ali Akbar Arefijamaal
---------------------------------------

Advisor: Dr. Mahmood Amintoosi
--------------------------------

Faculty of Mathematics and Computer Science	Pure Mathematics	Analysis
--	------------------	----------

Title of thesis: Framelet-based image inpainting and data recovery
--

Keywords: Framelet, tight frame, error estimate
---

Abstract: In this thesis, a general theory for lifting frames is presented that allows us to modify existing filters to construct new ones that form Parseval frames. A image denoising algorithm is then proposed, tailored to the specific properties of these new frame filters. We also demonstrate the performance of our algorithm on a diverse set of images with very encouraging results. Finally, to obtain the advantage of this algorithm we compare the results with the well-know algorithms such as *Median* and *Wavelet* methods.





**Hakim Sabzevari University**  
**Faculty of Mathematics and Computer Science**

**A Thesis Submitted in Partial Fulfilment of the Requirement for the  
Degree of Master of Science in Pure Mathematics**

# **Framelet-based image inpainting and data recovery**

**Supervisor:**  
**Dr. Ali Akbar Arefijamaal**

**Advisor:**  
**Dr. Mahmood Amintoosi**

**By:**  
**Abdolrashid Zahedi**

**February 2016**